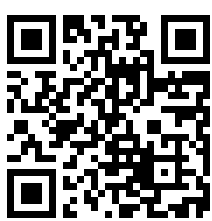
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

N. 1 PERIODICO TRIMESTRALE 1915

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA

ANNO XVII
1915

I FASCICOLO

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1915

Pubblicato il 10 marzo 1915.

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA

ANNO XVII
1915

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1915

Digitized by Google

Proprietà Letteraria

Pavia - Premiata Tipografia Successori Fratelli Fusi

Digitized by Google

INDICE

L. Godeaux, Un mathématicien Belge du XVI[ième] Siècle p. 33-36.

J. H. Graf, La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque. I. Lettres de D. Chelini a L. Schläfli, p. 36-49. II. Correspondance entre E. Beltrami e L. Schläfli, 1870-1891, p. 81-86, 113-122.

G. Vivanti, Luigi Forni matematico pavese. 122-125.

RECENSIONI ED ANNUNZI

Y. Mikami, The developement of mathem. in China and Japan (G. L.) p. 1-4. — **H. G. Zeuthen**, Die Mathem. in Altertum und Mittelalter (G. L.)p. 4-5. — **E. Picard**, Das Wissen der Gegenwart (G. L.) p. 5. — **N. Nielsen**, Mathematiken i Danmark (G. L.) p. 6-7. — **V. Volterra**, Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles; Leçons sur les fonctions de lignes (E. E. Levi) p. 7-15. — **Burali-Forti e Marcolongo**, Analyse vectorielle générale, Vol. I e II (M. Bottasso) p. 15-20. — **J. Knoblauch**, Grundlagen der Differentialgeometrie (E. Bompiani) p. 20-26. — **G. Loria**, Darstellende Geometrie, II Bd. (U. Amaldi) p. 26-28. — **F. Caldarera**, Trattato dei determinanti (G. L.) p. 28-29. — **A. Guillemin**, Tables de logarithmes (G. L.) p. 29. — **P. Mansion**, Abriss der Theorie der Hyperbelfunctionen (G. L.) p. 30. — **G. Loria**, Le scienze esatte nell'antica Grecia (A. Mieli e L. Carnera) p. 40-52. — **F. Klein und M. Brendel**, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Hefte II e III (G. L.) p. 53. — **A. Maire**, L'oeuvre scientifique de B. Pascal (A Pascal) p. 54-55. — **A. Markoff**, Démonstration du second théorème-limite du Calcul des probabilités (P. Pizzetti) p. 56-58. — **F. Caldarera**, Corso di Meccanica razionale T. I (T. Levi Civita) p. 58-59. — **S. Wiesner**, Grundlinien der Kinematik (G. L.) p. 59. — **A. Schönflies**, Entwickelung der Mengenlhere (G. Vivanti) p. 59-74. — **Sainte-Laguë**, Notions de mathématiques (G. L.) p. 74-75. — **E. Fabry**, Problèmes d'analyse mathématique (G. L.) p. 76. — **J. L. S. Hatton**, The principles of projective geometry (G. L.) p. 76. — **E. Müller**, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II Bd., I Heft (G. L.) p. 77-78. — **Th. Schmid**, Darstellende Geometrie I (G. L.) p. 78-79. — **J. Majcen**, Osnove deskriptive geometrije (G. L.) p. 79. **J. Delbnia**, Oeuvres mathématiques (G. L.) p. 87. — **L. Cremona**, Opere matematiche T. I e II (G. L) p. 87-88 — **P. Tannery**, Mèmoires scientifiques, T. II (T. L. Heath) p. 88-95. — **W. und J. Bolyai**, Geometrische Untersuchungen herausg. von P. Stäckel (G. L.) p. 95-99. — **U. Amaldi e F. Enriques**, Nozioni di matematica, ad uso dei Licei moderni, Vol. I (L. Galvani) p. 99-105. — **P. del Pezzo**, Principi di geometria projettiva (G. L.) p. 105-107. — L'ultimo teorema di Fermat (Lückhoff, Kempe, Löwenberg) (G. Vivanti) p. 107-108. — Recenti dissertazioni di laurea (Zona, Spitz, Kaiser, Rauber, Herrmann, Ackermann, Kurt, Sachs, Albrecht, Palm, Weber, Winkler, Gasiorowski, Jentzsch) (G. L.) p. 109-111. — **G. Eneström**, Verzeichnis der Schriften L. Eulers, II Lief., (G. L.) p. 125. — **E. W. Hobson**, Squaring

Digitized by Google

the Circle (G. L.) p. 125-126. — **Th. Heath**, Aristarchus of Samos (G. L.) p. 126-128. — **F. Hausdorff**, Grundzüge der Mengenlehre (G. L.) p. 128-132. — **S. Catania**, Grandezze e numeri (T. Boggio) p. 133-140.

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Favaro, Juhel, A. Pascal, Kaye, Zeuthen, Amodeo, Mikami, van Geer, Rudio, Grabouschi, p. 142-143.

NOTIZIE

Le opere di A. Volta. La matematica in Germania. S. Germain. Un precursore di Grassmann. Per la storia della strofoide. p. 31-32.

Annuaire pour l'an 1915. Tema proposto dal R. Istituto Veneto. Tema proposto dalla Società Jablonowski. Giubileo della scoperta dei logaritmi. Die deutsche Mathematik. p. 79-80.

Nuovi modelli di geometria. Matematica e artiglieria. Concorsi a premi. p. 111-112.

J. Molk, p. 143-144.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO XVII, Fasc. I: **Gennaio, Febbraio e Marzo** 1915

EMANUELE ... BIBLIOTECA

Storia.

Y. MIKAMI. — *The devolopement of Matematics in China ond Japan, with 67 Figuren the Text* (Abh zur Gesch. der math. W. issensch. 35, XXX Heft. Leipzig, Teubner 1912). 7°. b. X + 347 (Prezzo del vol. leg. Mk. 11).

(*Continuazione* v. T. XVI, p, 117).

Passando ad occuparsi della matematica nella propria terra, l'A. molto opportunamente comincia presentando un quadro generale della matematica giapponese (Cap. 22) ed una cronologia della stessa (Cap. 22). Da entrambi si desume che nulla si sa intorno a quanto i Giapponesi conobbero di matematica nell'antichità, se non che era presso di essi in uso il sistema decimale. Il primo matematico Giapponese di cui siasi serbata memoria appartiene al Secolo XVIII e si vuole che abbia viaggiato in Cina, ciò che corrisponde all'opinione generale che questa sia stata la fonte a cui in origine si abbeverarono i pensatori, in particolare i matematici dell'estremo Oriente. Ben presto ivi apparse un gran genio, dai propri compatrioti riguardato per il Newton del Giappone: Seki Kowa, nato nel 1642, anno in cui morì Galileo e nacque Newton; „ se per risultati (dice il Mikami, pag. 158) Seki non sorpassò Newton, non è inferiore ai due scienziati citati. La stessa spinta che Netwon diede alla matematica del suo paese, Seki potè imprimere al Giappone. La matematica giapponese propriamente detta aspettava un genio per venire solidamente stabilita. Indubbiamente Seki fu il padre della matematica giapponese „. Sgraziatamente non tutte le numerose sue opere esistono ancora, ma quelle superstiti servono a porgere un'idea dell'algebra da lui inventata, che è tuttora caratteristica pei lavori pubblicati in Giappone. A lui inoltre si deve una notevole serie per esprimere un arco di cerchio in funzione della sua corda,

Digitized by Google

mentre un suo discepolo ha proposto un metodo originale per approssimare le radici di un'equazione numerica, il quale meriterebbe di venire investigato per decidere se meriti un posto nella collezione degli espedienti congeneri. Nel Sec. XVIII emersero i matematici Aida e Fujita, fra cui sorse una disputa scientifica che menò grande rumore, e poi Ajima, il quale, fra l'altro, ottenne, mediante una serie elegante, il volume comune a due cilindri retti i cui assi s'incontrano ortogonalmente: è la figura stessa che Archimede insegnò la cubatura, nel suo *Ἐφοδικὸν* recentemente scoperto, nell'ipotesi che i raggi dei due cilindri sieno fra loro eguali.

Le prime tavole logaritmiche furono importate dalla Cina nel 1713, ma i Giapponesi vi prestarono scarso interesse; essi invece coltivarono con impegno e con buoni frutti la trigonometria. Così, appreso dagli Olandesi il concetto di cicloide, studiarono tale curva coi metodi loro propri. Malgrado tale fatto il Mikami dichiara che " le relazioni fra la scienza olandese e la matematica coltivata in Giappone sono tuttora ignote „ ed aggiunge, forse per esprimere l'idea che tali relazioni furono scarse od indirette, che " non si è serbata memoria di alcun giapponese occidentalista che fosse in pari tempo un matematico „.

Come ai nostri lettori è già noto (*Bollettino*, T. XIII. 1911, p. 48) Seki giunse per proprio conto alla nozione di determinante ed insegnò un'ottima regola di sviluppo per tali funzioni; a lui inoltre si deve un metodo per eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche, il quale in sostanza coincide con quello posteriore notissimo sotto il nome di Bezout. Al calcolo di π, sia con frazioni decimali, sia mediante serie, i Giapponesi consacrarono numerosi ed ottimi lavori; e da siffatti problemi furono condotti ad investigarne come si esprime il volume o la superficie d'una sfera ed a trovare una formola esprimente il quadrato d'un'arco circolare. Inoltre ad essi non sfuggì la sviluppabilità d'un radicale quadratico in frazione continua, nè l'importanza dell'analisi indeterminata, di cui risolsero parecchi bei problemi. Aijma ha anche trattate parecchie questioni sulle serie di circoli successivamente tangenti che si possono iscrivere nello spazio compreso fra due dati cerchi, questioni che si potrebbero porre utilmente a raffronto con alcune note ricerche di Pappo e di Steiner. Inoltre ha iniziato un'elegante soluzione dell'equazione indeterminata

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y^2$$

Digitized by Google

(cioè la seguente

$$x_1 = -a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \; x_r = 2 a_1 a_r \; (r = 2_1 \ldots u), \; y = a_1^2 + \ldots + a_n^2),$$

ed ha condotto a termine parecchie nuove ricerche sull'ellisse, delle quali dovrà tener conto chi in avvenire vorrà scrivere una completa monografia sopra questa celebre curva. Sopra i risultati di alcuni studi compiuti in Giappone intorno alla quadratura dell'ellissoide il giudizio non può essere oggi pronunciato, perchè la loro esattezza non é fuori di questione; va invece rilevato che, se anche i Giapponesi non furono in possesso della nozione di numero immaginario, avvertirono la molteplicità delle radici di certe equazioni e insegnarono metodi di approssimazione per le radici delle equazioni numeriche anche di grado elevatissimo (1).

Alcune opere manoscritte faranno fede della conoscenza da parte dei Giapponesi delle serie (in particolare della formola del binomio) e dell'essersi essi spinti fino a trattare le equazioni di grado infinito; sgraziatamente non è rimasta alcuna traccia dei ragionamenti che li guidarono ai risultati esposti: e siccome il rigore logico non era fra le loro abitudini, così tali risultati non potranno venire accolti definitivamente nella scienza se non dopo di essere stati dimostrati con argomentazioni soddisfacenti. I metodi da essi escogitati per costruire i quadrati magici meriterebbero di venire paragonati a quelli immaginati allo stesso scopo in India ed in Europa; altrettanto dicasi riguardo agli studi sopra la catenaria da essi compiuti dal 1860 in poi. Sorvoliamo, per brevità, sopra un grande numero di altri problemi risoluti nello scorso Secolo dal matematico Hogiwara Teisuke, quantunque parecchi siano dotati di novità ed interesse. E citiamo invece le indagini istituite nella terra del Sole levante a partire dal 1836, sopra il paraboloide iperbolico passante pei lati di un quadrangolo sghembo: le citiamo perchè è desiderabile vengano sottoposte a rigoroso esame onde assicurarsi se l'esattezza di alcune formole ivi stabilite, riconosciuta sinora soltanto per certi valori delle costanti, abbia luogo sempre; pei

(1) In un punto si trova la seguente coraggiosa espressione, infinita in due sensi:

$$\ldots (a - (a - (a - a^{\frac{1}{2}} b)^{\frac{1}{3}} b)^{\frac{1}{3}} b)^{\frac{1}{3}} \ldots$$

Digitized by Google

matematici Giapponesi dell'antica scuola tali verifiche (anche se poco numerose) avevano valore probatorio, ma per noi certamente no.

L'opera del Mikami termina con un Capitolo destinato a dar conto delle indagini storiche compiute nel Giappone e si chiude con l'augurio che esse siano in avvenire più numerose che in passato: è un voto a cui noi pure ci associamo, anzi estendendone la portata a tutto il mondo civile. Intanto non possiamo che rallegrarci che a tal genere d'investigazioni siasi dedicato il Mikami; giacchè, con le informazioni che egli ci ha dato, non soltanto ha sollevato parte del velo che nascondeva la matematica della Cina e del Giappone, ma ha indicato alcuni nuovi punti di vista ed ha suggerito parecchie nuove questioni teoriche interessanti i matematici di tutto il mondo: onde la lettura del suo importante volume va consigliata, non soltanto agli storici di professione, ma anche a tutti coloro che sono spinti dalla nobile ambizione di far progredire o di perfezionare la nostra scienza. G. L.

H. G. Zeuthen, *Die Mathematik in Altertum und in Mittelalter.* 8° gr. p. 95. Leipzig und Berlin, 1912. [Prezzo Mk. 3].

Da parecchi anni è cominciata in Germania la pubblicazione di una colossale opera enciclopedica dal titolo: *Die Kultur der Gegenwart; ihre Entwickelung und ihre Ziele.* Ne è direttore generale il prof. P. Hinneberg, mentre ognuna delle quattro grandi sezioni che la costruiscono ha un direttore speciale. Ai lettori nostri interesserà in particolar modo la III, destinata a presentare un quadro dello stato attuale delle nostre cognizioni sopra le scienze matematiche, fisiche e naturali, la cui organizzazione fu affidata a F. Klein, il cui nome è garanzia di ampiezza di vedute e serietà di propositi. Tale Sezione comincia con l'opuscolo il cui titolo si trova scritto in testa del presente articolo; ivi il dotto e geniale professore danese espone in rapida sintesi l'evoluzione della matematica pura, dalle origini sino a Leonardo da Vinci, cioè sino al momento in cui l'invenzione della stampa democratizzò il sapere, ponendo nelle mani di tutti le opere che sino allora erano stato il privilegio di pochi.

Per maggior chiarezza riproduciamo l'indice delle materie rapidamente trattate:

Digitized by Google

Sez. I: *Origine e sviluppo dei numeri e del calcolo.* — 1. Costruzione primitiva dei numeri; sistemi numerali. 2. Metodi primitivi e numerici di calcolo. 3. Espressione mediante la scrittura dei numeri interi e delle frazioni; suo uso nel calcolo. 4. Applicazioni del calcolo numerico.

Sez. II: *Origine della geometria; la matematica dei Greci.* — 1. Geometria empirica. 2. Origine del sistema geometrico elementare dei Greci (500-300 a. C.). 3. Matematica applicata presso i Greci. 4. Il periodo aureo della matematica alessandrina (300 sino a circa 100 a. C.). 5. Matematica ed astronomia; trigonometria. 6. Aritmetica greca.

Sez. III: *Decadenza e risurrezione della matematica greca.* — 1. Decadenza della matematica Greca. 2. Matematica degli Indiani e dei Cinesi moderni. 3. La matematica Araba. 4. Matematica degli Europei occidentali nel Medio Evo.

L'autore, per necessità di cose, non entra in molti particolari ma con rapidi tocchi fa conoscere lo stato attuale delle nostre cognizioni sopra ciascun soggetto, compiendo opera giovevole tanto a chi comincia lo studio delle matematiche, quanto a coloro che sono già provetti in tali discipline.

G. L.

E. Picard, *Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenchaft. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von* F. *und* L. Lindemann. (Wissenschaft und Hypothese n. XVI). Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913, 8°, p. IV+229. (Prezzo del vol. leg. Mk. 6).

È la versione del noto volume *La science moderne et son état actuel.* Esso va raccomandato anche ai lettori non tedeschi per le numerose e dottissime note di cui è corredato, le quali costituiscono un vero e proprio prezioso commento all'opera, ove sono accuratamente indicate anche tutte le pubblicazioni in cui il lettore può trovare sviluppate e dimostrate le verità semplicemente enunciate dall'illustre autore. Ciò basta a provare che, per questa nuova loro fatica (cfr. *Bollettino*, T. VIII, 1905, p. 103) i conjugi Lindemann meritano un'altra volta la gratitudine dei giovani studiosi. G. L.

Digitized by Google

N. Nielsen. *Matematiken i Danmark* 1528-1800. *Bidrag til en bibliografisk-historisk oversigt.* 8°; p. VI-336. Kobenhavn, Kristiania: Gyldendalske forlag. 1912.

N. Nielsen. *Matematiken i Danmark* 1801-1908. *Biblidrag til en bibliografik-historisk oversigt*, 8° VIII-1914. Ivi 1910.

L'autore di questi due volumi è ben noto nel mondo matematico per un grande numero di memorie, di trattati e di analisi che egli ha pubblicati in questi ultimi anni, non soltanto in Danese ma anche in Francese e Tedesco, dando prova di una fecondità realmente prodigiosa. Con gli scritti di cui ci apprestiamo ad occuparci egli mostra d'interessarsi anche alle ricerche intese a redigere un bilancio della produzione scientifica; ci esprimiamo così perchè essi, non sono propriamente storici, ma appartengono alle due più potenti ausiliari della storia della scienza, la bibliografia e la biografia. Il piano generale è, in entrambi, il medesimo, la differenza consiste soltanto nell'epoca a cui si riferiscono; però, in quello pubblicate più tardi, la distinzione delle varie parti risulta in modo più chiaro per una migliore ripartizione in capitoli.

La parte più importante dell'opera del Nielsen consiste in un elenco bibliografico di tutta la produzione matematica danese, ordinato per autori, di ciascuno dei quali vengono date, con scrupolosa esattezza, le essenziali notizie biografiche. Inutile dilungarci a dimostrare quale opera utile abbia compiuta il dotto professore dell'Università di Kopenhagen; ci permettiamo però di lamentare che egli abbia distribuiti gli autori per ordine alfabetico invece che in ordine cronologico; se avesse tenuto questo secondo sistema egli avrebbe permesso di seguire attraverso ai secoli la produzione matematica della sua terra, nè avrebbe in alcun modo ostacolata la consultazione del suo lavoro, dal momento che ciascuno dei volumi che lo formano si chiude con un elenco alfabetico dei nomi citati. Abbiamo creduto di fare quest'osservazione perchè il cambiamento da noi desiderato potrebbe essere adottato in un'edizione futura, senza bisogno di un rifacimento totale di tutta l'opera.

Il Nielsen dà notizia non soltanto delle opere originali, ma anche delle opere che furono tradotte in danese, di quelle anonime ed anche di quelle che sono il prodotto della collaborazione di due o più scrittori; nè manca di far conoscere i mutamenti di nome che, per effetto di una legge speciale, subirono alcuni matematici danesi. E siccome vi sono persone che cooperarono al

Digitized by Google

progresso della scienza, non con gli scritti, ma con la parola, così il Nielsen passa in rassegna tutte le varie scuole di grado elevato della sua patria, registra le persone che vi professarono e ne insegna i dati biografici fondamentali. Così nulla manca al quadro che egli si è proposto di tracciare; e che realmente valesse la pena di delinearlo risulta palese a chi rifletta che la Danimarca da secoli dà alle scienze esatti cultori di non comune valore; danese era il celebre astronomo Ticone Brahe ed il Wessel, che fu un precursore della rappresentazione geometrica dei numeri complessi; così lo furono Longomontano e Römer; e come non ricordare che di recente la Danimarca ha dato alla matematica dei pensatori quali Petersen e Zeuthen?

I volumi del Nielsen prendono posto, nella biblioteca di qualunque storico accanto ad un lavoro congenere, relativo al Portogallo, del Guimaraes (v. *Bollettino* T. III. 1900, p. 111 e XIII, 1911 pag. 5) e sarebbe assai desiderabile che altri congeneri venissero composti; ora, se per i paesi maggiori la cosa può spaventare per la sua vastità, per gli altri ciò è possibile senza gravi difficoltà. Qui anzi si presenta la circostanza che i casi in cui riesce più facile lo scrivere un'opera dell'indicato tipo sono anche quelli per cui l'impresa si presenta più urgente e necessaria: giacchè, se a tutte le opere pubblicate in Francia od in Germania è in generale assicurata una considerevole notorietà, altrettanto non può dirsi per quelle che vedono la luce in Olanda od in Boemia. Se con la sua meritoria fatica il Nielsen avrà dato un esempio efficace, da un altro punto di vista egli avrà ben meritato dalla scienza. G. L.

Funzioni di linee.

VITO VOLTERRA I. *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles pubbliées par* M. TOMASETTI *et* F. S. ZARLATTI, Paris, Gauthier-Villars 1913: 8°, p. 164. (Prezzo fr. 5,50).
II. *Leçons sur la fonctions des lignes roceuillies et rêdigées par* J. PÉRÈS, Paris, Gauthier-Villars 1913: 8°, p. 230 + VI. (Prezzo L. 7,50).

(*Continuazione v.* T. XVI p. 124)

La teoria delle funzioni di linee trova una applicazione assai importante nello studio dei fenomeni ereditarii, e cioè di quei fenomeni i quali dipendono non già dalle sole condizioni attuali del sistema, ma da tutta la storia di esso. Così un filo per una

Digitized by Google

stessa tensione si deforma diversamente secondo le tensioni che ha già sopportato: l'analogo vale per i fenomeni di magnetizzazione, ed in generale per tutti i fenomeni detti di isteresi e di reattività. Chiamiamo per generalità $h(t)$ il valore al tempo t della variabile che caratterizza l'azione esteriore, $l(t)$ quello della variabile che caratterizza lo stato del sistema e che è affetta da eredità [1]: sarà volta a volta $h(t)$ la tensione, il momento di torsione, la intensità del campo magnetico, e corrispondentemente $l(t)$ l'allungamento, l'angolo di torsione, l'induzione magnetica ecc. Tutti questi fenomeni ubbidiscono, in prima approssimazione e per valori non troppo forti dell'azione esteriore, alla legge di proporzionalità (legge di Hooke nel caso dell'elasticità)

$$l(t) = \gamma\, h(t)$$

con γ costante. Ma le osservazioni che precedono ci dicono che occorre modificare tale legge di azione elementare esprimendo che $l(t)$ dipende anche da tutti i valori anteriori di $h(t)$: porremo:

$$l(t) = \gamma\, h(t) + F\left|\overset{t}{\underset{-\infty}{h}}(\tau)\right|. \tag{14}$$

Imitando il noto ragionamento, fondato sulla formula di Taylor, che permette in una prima approssimazione di supporre lineari le leggi fisiche elementari, noi potremo, ove la F sia sviluppabile nella forma (2), sostituirla col primo termine di essa: avremo così la formula:

$$l(t) = \gamma\, h(t) + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t, \tau)\, \dot{h}(\tau)\, d\tau : \tag{15}$$

una legge elementare di tale forma è chiamata dal Volterra *legge di ereditarietà lineare* (II 6, 14; I 4).

E notevole che già il Boltzmann ha proposto per la rappresentazione dei fenomeni elastici una formula di questo tipo: per giungere ad essa egli partiva dall'ipotesi che valesse il principio della sovrapponibilità delle azioni elementari.

Come determinare la funzione $\varphi(t, \tau)$ nella (15)? Il Boltzmann assumeva senz'altro che valga la condizione dell'*invariabilità dell'azione ereditaria nel tempo*: e cioè che l'influsso che sul valore

(1) Supponiamo qui per semplicità di esposizione che una sola sia la variabile che caratterizza l'azione esteriore, ed una sola quella che caratterizza lo stato del sistema: il Volterra tratti casi assai più complessi.

Digitized by Google

di $l(t)$ ha l'azione $h(\tau)$, non dipenda dal valore di t e di τ, ma solo dal tempo frapposto: poneva quindi

(16) $$\varphi(t, \tau) = \Phi(t - \tau).$$

Alla stessa conclusione giunge il Volterra sia per questa via sia servendosi di un'analisi assai più minuta. Il Volterra osserva che se si assoggetta un filo ad azioni periodiche di periodo T, anche le deformazioni sono periodiche col periodo T: l'enunciato di tale fatto il Volterra chiama il *principio del ciclo chiuso.* Orbene se vale il principio del ciclo chiuso, e insieme si suppone che valga il *postulato della dissipazione dell'azione ereditaria* — secondo il quale ogni azione ereditaria rende a zero col tendere ad ∞ del tempo — viene di conseguenza la (16) (I 4, II 7). Anzi l'analisi del Volterra è più generale poichè riguarda anche casi in cui la legge di eredità (14) non è lineare (II, 7). Ammessa ad ogni modo la (16), si può anche ottenere una formula assai semplice che dalla conoscenza sperimentale di $l(t)$ e $h(t)$ serva a dedurre la $\Phi(t-\tau)$; si tratta in sostanza di risolvere un'equazione del tipo (9) (II, 6).

Fermiamoci a discutere un istante sulla portata di queste considerazioni. Non mi tratterrò sulle obbiezioni che taluno mosse all'effettiva esistenza di azioni ereditarie, dubitoso che una più perfetta conoscenza dell'intima costituzione dei corpi potrebbe permettere di restare nel quadro della meccanica ordinaria. Tali obbiezioni il Volterra discute molto acutamente in II, 14; non pare che a priori l'ammettere la reale esistenza di azioni ad effetto ereditario debba ritenersi più difficile che l'ammettere azioni a distanza: e del resto, mentre allo stato attuale delle nostre conoscenze circa la costituzione dei corpi nulla sappiamo di così preciso e atto alla misura che possa sostituire nei fenomeni di cui parliamo la conoscenza della storia del corpo medesimo, non sarebbe forse difficile esprimere una formula di tipo ereditario mediante il linguaggio delle ipotesi molecolari e delle azioni attuali: a una tale traduzione accennò rapidamente il Maxwell nell'esporre l'ipotesi del Boltzmann nell'art. " Constitution of bodies „ dell'Encyclopedia Britannica.

Dirò di più: la formula del Volterra ha un indubbio valore sperimentale: il Volterra cita a conferma (II, 14) le esperienze di Webster e Porter; ricorderò che il Boltzmann si fondava su ricerche sperimentali proprie e del Kohlrausch giungendo ad una determinazione precisa della funzione $\Phi(t - \tau)$, che più tardi il

Digitized by Google

Wiechert modificava onde meglio avvicinarsi ai risultati delle esperienze.

Ma nei fenomeni ereditarii occorre distinguere due diverse apparenze: l'isteresi propriamente detta e i fenomeni di reattività (Nachwirkung, trainage). L'isteresi si manifesta più limpidamente nel magnetismo: per essa l'induzione magnetica $l(t)$ dipende da tutti i valori antecedenti dell'intensità del campo $h(t)$: ma la maggiore o minore rapidità con cui si sono succedute le diverse intensità del campo non ha (almeno per valori non troppo elevati e campi non troppo deboli) nessuna influenza: analiticamente la funzione $F\left[\overset{t}{\underset{-\infty}{h}}(\tau)\right]$ deve essere tale che il valore di F risulti immutato per qualunque trasformazione $\tau = \chi(t)$ ove $\chi(\tau)$ sia una funzione per cui

$$\chi'(\tau) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t=-\infty} \chi(t) = -\infty, \ \chi(t) = t:$$

inoltre ai massimi di $h(t)$ corrispondono i massimi di $l(t)$. I fenomeni di isteresi si connettono nel magnetismo coi fenomeni di magnetizzazione permanente, e nel caso della elasticità coi fenomeni di rincrudimento. I fenomeni di reattività consistono invece nel fatto che la variabile affetta da eredità $l(t)$ continua a variare se pure resta costante l'azione esterna: questi ultimi fenomeni sono della massima inportanza per piccole variazioni dell'azione, mentre per grandi variazioni dell'azione esterna prevalgono quelli di isteresi. La formula del Volterra si adatta a spiegare bene i fenomeni di reattività, non quelli di isteresi. Nè il Volterra si nasconde tale lacuna; che anzi richiamandosi a una obbiezione di Levi-Civita, accenna ad una formula non lineare la quale soddisferebbe a taluna delle condizioni su esposte per i fenomeni di isteresi (II 7); ma si astiene, certo per la grande complicazione di essa, dal trarne ulteriori conseguenze.

*
* *

Ponendo a base della teoria dell'elasticità o del magnetismo la formola (15) di azione elementare, tutte le formule di questa risultano profondamente alterate: le equazioni alle derivate parziali delle ordinarie teorie dell'elasticità e del magnetismo vengono sostituite con *equazioni integro-differenziali*: e cioè con equazioni integrali in cui, oltre alle funzioni incognite, si pre-

Digitized by Google

sentano le loro derivate. Ad es. (I 4, II 5, 7) nel magnetismo si presenta l'equazione fondamentale del tipo ellittico

$$(17)\quad \sum \left[\frac{\partial^2 u(x,y,z;t)}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f_1(t,\tau)\, d\tau \right] = f(x,y,z;t)$$

ove con Σ devesi intendere la somma dei termini che si ottengono da quello scritto col cambiarvi x in y e z e l'indice 1 in 2 e 3: un sistema di equazioni simile a questo si presenta (II, 8) nel problema dell'equilibrio elastico; ed altre simili equazioni nello studio delle vibrazioni di una sbarra (II, 6) ecc.

Tali equazioni, di fronte al principio del passaggio dal finito all'infinito, debbono considerarsi come il limite per $n = \infty$ di un sistema di n equazioni differenziali.

Su di esse — anche in vista della loro importanza nelle applicazioni — il Volterra si trattiene assai a lungo: mostra su interessanti esempii come talora si possono ridurre a semplici equazioni integrali (I, 4 § 2), eventualmente usando del classico metodo della separazione delle variabili (II, 6 § 9): ma le tratta pure direttamente. Così per l'equazione (17) mostra che si può svolgere tutta una teoria analoga a quella dell'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$ (II, 5): per il problema dell'equilibrio elastico riesce ad integrare il caso della sfera isotropa quando siano noti gli spostamenti al contorno (II, 8). Si introducono così eleganti sviluppi, e nuove trascendenti che generalizzano alcune delle più note funzioni: ma su ciò sarebbe troppo lungo il trattenerci.

Noterò soltanto che, come per le equazioni integrali ordinarie, lo studio delle equazioni integro-differenziali è alquanto diverso secondo che i limiti degli integrali che vi compaiono sono fissi come nelle (7) (8) o variabili come in (9) (10). Le equazioni a limiti costanti, sono assai più difficili: ad es. è da prevedersi che la classificazione delle equazioni di 2° ordine in ellittiche, paraboliche e iperboliche che è tanto fondamentale per i problemi al contorno e che si estende alle equazioni integro-differenziali a limiti variabili senza troppa difficoltà, non si potrà estendere senz'altro facilmente alle equazioni a limiti costanti. Le equazioni studiate dal Volterra sono in generale a limiti variabili: un contributo notevole allo studio dell'equazione a limiti costanti analoga a (17) è dato in II, 13 mediante la teoria delle funzioni permutabili di cui ora parleremo.

Digitized by Google

* * *

I metodi generali di risoluzione delle equazioni integro-differenziali sono assai faticosi, ed ancora incompleti. Per trattare più facilmente, almeno in ampii casi, tali equazioni il Volterra introduce l'elegante teoria della composizione e delle funzioni permutabili, cui dedica i cap. II. 9, 10, 11, 12, 13, e buona parte di I, 4.

Risultante di prima specie di due funzioni $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ è la funzione

$$\overset{*}{F}_1\ \overset{*}{F}_2(x,y) = \int_x^y F_1(x,\xi)\, F_2(\xi,y)\, d\xi; \tag{18}$$

risultante di seconda specie è la funzione

$$\overset{**}{F}_1\ \overset{**}{F}_2(xy) = \int_0^1 F_1(x\xi)\, F_2(\xi y)\, d\xi : \tag{19}$$

composizione di prima o di seconda specie l'operazione di integrazione che fa passare da F_1 e F_2 alle loro risultanti; le funzioni F_1 F_2 diconsi *permutabili di prima o di seconda specie* rispettivamente se

$$\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2 = \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2 \quad \text{o} \quad \overset{**}{F}_1\overset{**}{F}_2 = \overset{**}{F}_2\overset{**}{F}_1$$

Nel caso delle funzioni permutabili le operazioni di composizione così definite godono delle proprietà della moltiplicazione compresa la proprietà distribuitiva rispetto alla somma. Conviene inoltre estendere la nozione di composizione col porre, se a e b indicano costanti,

$$(a + \overset{*}{F}_1)\,\overset{*}{F}_2 = a\,F_2 + \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2$$

$$(a + \overset{*}{F}_1)(b + \overset{*}{F}_2) = ab + aF_1 + bF_2 + \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2$$

e le analoghe per il caso della composizione di seconda specie: con tale estensione si conservano ancora le proprietà algoritmiche della moltiplicazione: e risulta evidente che se F_1 ed F_2 sono permutabili lo sono ancora $a + F_1$ e $b + F_2$.

Ciò posto, se in una identità algebrica alle variabili si sostituiscono funzioni permutabili, ai prodotti le loro risultanti, essa risulterà ancora vera. Così ad es: se si pone

$$u = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \ldots + \frac{z^n}{a^n} + \ldots$$

Digitized by Google

si ha l'identità $u(z-a)=z$. Si deduce che se $F(x,y)$ è una funzione qualunque e si indica con $\overset{*}{F}^{n}(x,y)$ la funzione che si ottiene componendo n volte secondo la prima specie F con se stessa, (1) la serie

$$(20) \qquad \frac{F(x,y)}{a}+\frac{\overset{*}{F}^{2}(x,y)}{a^2}+\cdots+\frac{\overset{*}{F}^{n}(x,y)}{a^n}+\cdots$$

rappresenta, tosto che converge in un campo C di valori di xy, una funzione $S(xy)$ soluzione della equazione $(a-\overset{*}{F})\overset{*}{S}=F_1$ o, in forma esplicita, della

$$(21) \qquad a\,S(x,y)-\int_x^y F(x,\xi)\,S(\xi,y)\,d\xi=F(x,y).$$

Ed analogamente, se nel formare (20) si fosse usato la composizione di seconda specie, si sarebbe ottenuta, supposto che anche la nuova serie converga, una funzione $S_1(x,y)$ soluzione di $(a-\overset{**}{F})\overset{**}{S}_1=F$ ossia di

$$(22) \qquad a\,S_1(x,y)-\int_0^1 F(x,\xi)\,S_1(\xi,y)\,d\xi=F(x,y).$$

La (20) dà dunque la soluzione delle equazioni integrali (21) e (22), anzi il lettore rileverà facilmente che, a parte qualche differenza di notazione, la (20) è la (13), la (21) è la (12).

Affatto analogamente, in generale, presa una equazione analitica, finita o differenziale, si può da essa ottenere due equazioni integrali od integro-differenziali l'una coi limiti degli integrali fissi ed uguali a 0 e 1, e l'altra coi limiti degli integrali variabili: occorrerà sostituire nello sviluppo in serie di potenze le variabili con funzioni permutabili, i loro prodotti con risultanti di prima e seconda specie, seguendo alcune norme e precauzioni il cui enunciato sarebbe qui troppo lungo e difficile, ma che traggono la loro origine dal fatto che, nelle regole di composizione che abbiamo rammentato più sopra le costanti si comportano in modo eccezionale. Assunta poi una soluzione regolare analitica dell'equazione primitiva, ove nel suo sviluppo in serie di potenze

(1) Si noti che una funzione è sempre permutabile con sè stessa.

Digitized by Google

si facciano le stesse sostituzioni che nell'equazione, si avrà una serie che è soluzione formale dell'equazione integrale o integro-differenziale dedotta: ove la serie converga, essa è pure una soluzione effettiva. È quindi essenziale discutere la questione della convergenza: il Volterra mostra il bel teorema che effettivamente, se le serie primitive erano convergenti in un campo anche arbitrariamente piccolo, saranno sempre convergenti le serie che si ottengono ove nella sostituzione si faccia uso di funzioni permutabili e di operazioni di composizione di prima specie: mentre se si usa di composizioni di seconda specie conviene supporre perciò che le serie primitive siano funzioni intere o quoti di funzioni intere. Connessa colla dimostrazione di convergenza è la interessante dimostrazione di unicità delle soluzioni così ottenute. Le formule che si ottengono applicando questi principii sono oltremodo numerose ed eleganti: per trattenerci su di esse occorrerebbe però entrare in troppi particolari (II 10, 13).

Pensiamo piuttosto che il lettore si chiederà, se la condizione di permutabilità non restringe troppo il campo delle applicazioni di queste ultime teorie. Per dissipare tale dubbi è opportuno richiamare i risultati che il Volterra ottiene sugli insiemi di funzioni permutabili. Il Volterra dimostra che le funzioni permutabili di prima specie con una data funzione formano gruppo, e cioè sono pure permutabili fra loro: e insegna a costrurre tali gruppi di funzioni, applicando poi tali risultati alla risoluzione di certe equazioni integrali con punti critici (II, 11): in particolare mostra che le funzioni di $x - y$, di cui abbiamo visto l'importanza nelle applicazioni alla teoria dell'elasticità e del magnetismo, sono tutte permutabili di 1ª specie fra loro (II, 10). Alle questioni analoghe, ma assai più difficili, per le funzioni permutabili di 2ª specie è dedicato il cap. II, 12: in esso la ricerca di tutte le funzioni permutabili con una del tipo $\sum_1^n \sum_1^n b_{is} f_i(x) \varphi_s(y)$ è ridotta alla ricerca delle sostituzioni permutabili con una data.

* * *

Dopo questa enumerazione, già così lunga sebbene abbia sorvolato su molti interessanti particolari, mi piacerebbe riassumermi in un apprezzamento sintetico. Ma la cosa è quanto mai difficile, poichè abbiamo davanti un'opera di scienza che sorge, ed in poche materie come nelle nostre manca un criterio obbiettivo

Digitized by Google

per giudicare della scienza durante il suo sviluppo: poichè è nell'essenza della Matematica la libertà di creare a se stessa l'oggetto dei proprii studii, ed è difficile l'indicare quale guida debba disciplinare tale libertà. Certo però mentre riterrei ristretto il criterio esterno di misurare l'importanza di certe idee dalla larghezza di precise applicazioni ad altre scienze, credo invece che molto peso si debba dare al criterio più interno di quanto esse riescano suggestive ad altri ricercatori. Ora di tale dote abbondano le idee esposte in questo volume. Merito grande del Volterra è l'avere affermato la necessità dell'introduzione definitiva e sistematica dell'idea di funzione di linea, di cui l'integrale nell'analisi classica formava quasi un esempio isolato; l'avere affermato che tale concetto devesi introdurre anche nello studio dei fenomeni fisici in cui similmente la legge del Boltzmann appariva isolata e singolare: tali affermazioni non possono non influire grandemente nell'orientazione del pensiero degli studiosi. Ma poichè di più, pure partendo da queste concezioni così generali, e foggiando i primi strumenti per un'analisi di esse, il Volterra strettamente le connette con alcune delle più fruttifere teorie analitiche recenti quale quella delle equazioni integrali, poichè non trascura l'esame di quelle particolari ipotesi che permettono di giungere con nuovi algoritmi in questioni difficili a formule di insperata semplicità ed eleganza formale, ne risulta un libro di interesse assai vario e via via rinnovato; e, ritengo, eminentemente suggestivo per gli studiosi dalle più diverse tendenze mentali e dalle predilezioni più svariate. Sarei contento se il lettore potesse giungere da sè a questa conclusione dalla lettura di quanto ho scritto più sopra.

E. E. Levi

Calcolo Vettoriale.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo. — *Analyse vectorielle générale.* Vol. I. *Trasformations linéaires.* Traduit de l'italien par P. Baridon, 1 vol. in 8°, pag. XIX + 178, 1912 (Frs. 6). Vol. II. *Applications à la mécanique et à la physique.* 1 vol. in 8°, pag. XII + 144, 1913 (Frs. 5). Pavia, Mattei e C. editori.

Son questi i due primi volumi di una Collezione in cui gli AA. si accingono ad esporre interessanti argomenti di *Meccanica*, di *Fisica matematica* e di *Geometria differenziale*, seguendo i me-

Digitized by Google

todi rapidi e semplicissimi del moderno Calcolo vettoriale intrinseco. Essi si possono riguardare, in parte, come traduzione del volumetto " *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica matematica* „ del quale ebbimo ad occuparci in questo Bollettino (*). Ma nella traduzione, ora in esame, è molto cresciuta la materia, la quale ha inoltre assunto una forma che può ritenersi definitiva, sicchè non sarà inutile darne qualche maggior cenno.

Il fine che si propongono gli AA. è di mostrare come il Calcolo vettoriale intrinseco semplifichi, talvolta in modo sorprendente, la trattazione di molti problemi sia di Geometria, sia delle Matematiche applicate. Ciò, del resto, riesce naturale se si osserva che in tale calcolo si opera direttamente sugli elementi geometrici, o fisici, con operazioni analoghe a quelle del calcolo algebrico. Si ha così modo di esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche, o le grandezze fisico-meccaniche rappresentate geometricamente; di rappresentare con equazioni delle proposizioni su tali grandezze, e sostituire una trasformazione d'equazioni ad un ragionamento. Esso offre quindi un grande vantaggio sui metodi ordinari delle coordinate, che bene spesso mascherano risultati molto semplici sotto una eccessiva complicazione di calcolo; e presenta una vera economia di pensiero nello svisceramento delle questioni geometrico-meccaniche. Per tale ragione il calcolo vettoriale intrinseco s'impone, ormai, non solamente ai cultori delle matematiche applicate, ma anche a tutti quelli che coltivano gli studi geometrici.

Non è questo il luogo di ribattere certe accuse, fatte genericamente per ignoranza (conscia o no), che il calcolo vettoriale non possa astrarre dalle coordinate: non sia quindi altro che un modo di esprimere, in sostanza, con una sola lettera una espressione complessa; ovvero — secondo altri — che tale calcolo escluda le coordinate medesime. Vero è, invece, che il calcolo realmente assoluto dei nostri AA. non ha affatto bisogno di ricorrere alle coordinate, ma è sempre pronto a darcele e di qualsiasi specie, in modo semplicissimo, quando gli siano richieste. Questo passaggio rapido dalle espressioni assolute a quelle con coordinate, oltrechè servire allo studio con queste di qualche speciale questione, in cui le coordinate possono adoperarsi util-

(*) Vedi l'anno XIII, p. 106-109.

Digitized by Google

mente, serve d'altra parte specialmente: sia a confrontare i risultati con quelli dedotti coi metodi ordinari, sia a convincere viemmeglio gl' iniziati, ai quali siano sopratutto famigliari i metodi cartesiani, della effettiva potenza del calcolo assoluto.

La Collezione, di cui ci occupiamo, presuppone la conoscenza delle operazioni vettoriali elementari esposte dagli AA. nei loro " *Elementi di calcolo vettoriale*, ecc. „ (*) i quali permettono d'impadronirsi in breve dei fondamenti di tale Calcolo, porgendo subito nel tempo stesso molte utili ed interessanti applicazioni.

Le notazioni adottate dagli AA. sono state da questi fissate dopo serie ricerche, confronti e discussioni sui lavori degli inventori (Grassmann, Hamilton,...), e sulle leggi che reggono ogni simbolo di operazione (**). Esse sono quasi tutte conformi a quelle proposte dai fondatori del Calcolo vettoriale e sono ormai accolte da numerosi autori, nè potranno certo mutarsi con altre più o meno assurde ed illogiche (***).

La parte preliminare, o " *sistema minimo* „ del calcolo vettoriale, benchè presenti già un vasto campo d' applicazioni, non è sufficiente sia allo studio dei corpi rigidi, sia dei corpi deformabili, delle azioni elettriche, ecc.; donde la necessità di nuovi operatori. Di qui l' introduzione delle omografie vettoriali (già considerate dal Grassmann da un punto di vista completamente analitico), nonchè le derivate rispetto ad un punto, dalle quali ultime si deducono semplicemente tutti gli ordinari operatori differenziali.

Nel primo volume dell' "*Analyse vectorielle générale* „ sono esposte le leggi generali soddisfatte dall' algoritmo impiegato, leggi affatto simili a quelle dell'algebra ordinaria e conformi a quelle introdotte in modo geniale dall' Hamilton per gli operatori. È inoltre provato che il calcolo dei quaternioni di Hamilton, certamente ammirevole e perfetto nei concetti e notazioni (na-

(*) Ediz. italiana: Bologna Zanichelli, 1909, (Vedi questo *Bollettino*, a. XII, 1910, p. 71-73); o la più completa traduzione francese per S. Lattès: Paris, Hermann, 1910.

(**) Si vedano in proposito gli studi fatti dai nostri AA. in note comparse nei *Rendic. del Circolo Matem. di Palermo* (t. 23, 24, 25, 26), nel *Nuovo Cimento* (1007), nell' Enseignement Mathématique (1907, 1910, 1911).

(***) V., per es., le contraddizioni rilevate dagli AA. nell'Appendice del Vol. II. per l'art. dell'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Ediz. francese, t. IV, V. 2.

Digitized by Google

turalmente nella sua forma primitiva, e non nelle degenerazioni più o meno assurde dei suoi seguaci), è nondimeno insufficiente per il calcolo vettoriale intrinseco, anche quando si voglia sorvolare sulla complicazione superflua del suo algoritmo. Del pari è mostrata la deficienza logica, nei concetti e nelle notazioni, degli altri sistemi vettoriali.

Così nel Cap. I delle " *Transformations linéaires* „, preceduto da fondamenti della teoria generale dei sistemi e degli operatori lineari, sono definite, classificate e studiate le più semplici e notevoli *omografie vettoriali;* esponendo in seguito le generalità sui loro operatori fondamentali.

Il Cap. II è dedicato alle *funzioni di punto e loro derivate*, dopo una necessaria premessa onde fissare in modo rigoroso per tali funzioni, o per analoghe funzioni più generali, le definizioni sui limiti, i differenziali e le derivate. Da queste son dedotti gli operatori differenziali ordinari, sia del primo ordine che di ordine superiore, dei quali sono esposte le generalità e le proprietà più importanti.

Infine nel Cap. III, sugli *integrali ed equazioni differenziali*, si ottengono nel modo più semplice sotto forma assoluta i teoremi classici di Green, di Gauss, di Jacobi, di Clebsch, nonchè le equazioni di Laplace e di Poisson, che — com'è noto — sono gli strumenti più efficaci nelle ricerche di Fisico matematica.

Nell'Appendice, con l'esposizione delle ragioni delle notazioni e definizioni adottate, ed il confronto con gli altri sistemi vettoriali, si trovano tre ottime note del compianto Prof. M. Pieri, ed il tutto è completato con opportune note storiche e bibliografiche.

Il secondo volume " *Applications à la mécanique et à la physique* „ mostra in una rapida sintesi i vantaggi del Calcolo vettoriale intrinseco, mediante l'esposizione delle sue più importanti ed eleganti applicazioni fisico-meccaniche. Il lettore può, nel contempo, rendersi ragione d'essere di molti operatori differenziali considerati nel primo volume. Egli non deve però credere di avere (*Préfaz.* pag. IX); " in un traité de Mécanique, in un traité de Physique mathématique ; mais en glissant de ci de là à travers ces vastes domaines „ gli AA. vedono, a ragione, " d'avoir présenté au lecteur une matière suffisante pour qu'il se familiarise avec les méthodes, pour qu'il puisse voir quelle immense matière peut être ressemblée en une centaine de pages

Digitized by Google

et enfin pour qu' il puisse se convaincre que ces méthodes permettent de faire toujours un pas en avant, soit en traitant et en résolvant des questions nouvelles, soit en généralisant et en complétant sur des nombreux points des questions aujourd' hui anciennes „. E basta infatti dare uno sguardo al vasto contenuto dei varî capitoli.

Nel Cap. I, con i momenti d' inerzia e la quantità di moto, si studia il *moto d'un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, considerando in particolare i casi del corpo pesante e del corpo che non è soggetto ad alcuna forza.

Nel Cap. II, dedicato alla *cinematica e statica dei corpi deformabili*, sono stabilite le equazioni usuali dell'equilibrio e del moto dei corpi elastici isotropi, e si trovano, in quest' ultima ipotesi, le formule fondamentali relative agli spostamenti ed alla dilatazione cubica.

Nel Cap. III è trattato il *moto libero per onde piane polarizzate* nei mezzi isotropi o cristallizzati, riducendo il tutto all' integrazione delle equazioni delle corde vibranti. Si deducono tanto l' ellissoide di propagazione quanto quello di elasticità; le leggi di Fresnel e la superficie d'onda.

Cap. IV è dedicato all'*idrodinamica* dei fluidi sia perfetti che vischiosi, la sua teoria completa vien svolta dal Prof. T. Boggio nel terzo volume.

Per il moto dei fluidi perfetti son stabilite le equazioni fondamentali, da cui seguono quelle di Lagrange, di Weber (con gl' integrali di Cauchy) e di Helmholtz. Dalle corrispondenti equazioni del moto per i fluidi vischiosi, nel caso in cui questi siano incompressibili, si ha un teorema di reciprocità analogo a quello del Betti per i corpi elastici; e vien espressa la velocità e la pressione (interna) se il moto è lento o stazionario.

Nel Cap. V son riuniti i risultati classici sulla *propagazione del calore* nei mezzi isotropi o cristallizzati. Si ottengono così l'ellissoide di conducibilità, l'ellissoide principale di Lamé e quello di Boussinesq. Dalle equazioni sulla propagazione del calore si cercano soluzioni particolari, trovando fra le formule integrali una generalizzazione della formula del Betti ed un'altra della formula del Mathieu.

Il Cap. VI contiene l'*elettrodinamica* dei corpi sia in riposo che in moto, fissando dapprima le equazioni di Maxwell-Hertz. Della recente *teoria degli elettroni* si trovano le equazioni del

Digitized by Google

Lorentz, con i relativi integrali; l'equazione del momento elettromagnetico e quella dell'energia, deducendone le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica dei corpi in moto, per le quali ultime si studiano le *trasformazioni generali di Lorentz*, che comprendono quelle così chiamate dal Minkowski. Ma va specialmente rilevato che la trattazione è fatta senza bisogno affatto di ricorrere, come fa il Minkowski (ed altri dopo di lui), ai vettori imaginari a quattro dimensioni, e si ottengono così sotto *forma reale* le forze elettrica e magnetica del campo trasformato.

Nell'Appendice gli AA. mostrano la illogicità di certi concetti vettoriali e relative notazioni, dando pure un saggio delle ricerche del Ball (R. S.), esposte con le formazioni geometriche di Grasmann-Peano.

Alla fine del secondo volume si trovano alcuni complementi al primo delle " *Transformations linéaires* ".

MATTEO BOTTASSO.

Geometria differenziale.

JOHANNES KNOBLAUCH. *Grundlagen der Differentialgeometrie.* Gr. 8°, p. X + 634. Leipzig, Teubner, 1913. [Prezzo Mk. 18].

Ai numerosi trattati di geometria differenziale pubblicati negli ultimi anni se n'è aggiunto di recente uno, che qui vogliam prendere in esame, che si riattacca ad un altro dello stesso A. comparso nel 1888. L'odierno trattato del Knoblauch s'intitola: " Grundlagen der Differentialgeometrie "; quello del 1888: " Einleitung in die allgemeine Theorie der Krummen Flächen ".

L'idea da cui essi prendono origine è, come avverte il Knoblauch, nella prefazione dei " Grundlagen ", che, abbandonate alcune ricerche di carattere affatto elementare, le operazioni fornite dal calcolo sono di per sè sprovviste di significato geometrico e che non sono perciò atte allo studio di proprietà differenziali di enti geometrici. Conviene dunque procurarsi un mezzo che rappresenti meglio le proprietà intrinseche dell'ente che si studia: occorre creare uno strumento d'analisi *adeguato* al fine cui si mira.

Si può dire che quest'osservazione è ormai a base di tutte le ricerche geometriche moderne: essa acquista quindi valore ben determinato solo dal modo con cui vien tradotta in atto. Il lettore potrà, spero, rendersene conto dall'esposizione che segue.

Digitized by Google

Il Knoblauch, in un I° capitolo d'introduzione alla teoria delle curve sghembe (che manca, almeno esplicitamente, nell'" Einleitung „ ma di cui si trova traccia nel § 89), dà la nozione di derivata geometrica di una funzione χ dei punti d'una curva d'arco s: essa è rappresentata da

$$\Theta \chi = \frac{d\chi}{ds}$$

Servendosi del simbolo Θ scrive le *formole di Frenet* per il triedro formato dalla tangente, binormale e normale principale alla curva in un suo punto. Nulla di nuovo nell'applicazione all'elica cilindrica e nel brevissimo cenno sull'elica osculatrice ad una curva in un punto.

Il II° capitolo (che corrisponde all'incirca ai primi otto § § dell'altra opera) ci dà i concetti e le formole fondamentali della teoria della superficie. L'A. dà le tre rappresentazioni di una superficie dell'ordinario spazio euclideo in coordinate cartesiane ortogonali:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad F(x, y, z) = 0$$

$$\text{(III)} \quad z = z(x, y)$$

e ne mantiene generalmente l'uso in tutto il corso dell'opera: qui data la prima forma quadratica fondamentale (e gli invarianti differenziali di I° ordine e misto) per la (I), se ne serve per la rappresentazione del piano tangente e della normale.

Ciò che caratterizza in questo capitolo (come nel seguito) il punto di vista dell'A. è l'introduzione di un *secondo sistema di formole di Frenet* per lo studio di una curva tracciata sopra una superficie: il triedro triortogonale è formato dalla tangente alla curva in un suo punto, dalla normale alla curva tangente ivi alla superficie (detta normale tangenziale) e dalla normale alla superficie: per quanto riguarda l'orientazione esso dev'essere congruente in quest'ordine a quello degli assi (x, y, z).

Se (A, B, C), (A', B', C'), (X, Y, Z) indicano ordinatamente i coseni di direzione di queste tre rette e se n e g indicano le proiezioni della prima curvatura della curva (rappresentata da un segmento della normale principale) sulla normale e rispettivamente sul piano tangente alla superficie, e t la torsione geode-

Digitized by Google

tica della curva nel punto che si considera, il secondo sistema di formole di Frenet si riassume simbolicamente nel quadro:

$$\begin{vmatrix} \Theta A & \Theta B & \Theta C \\ \Theta A' & \Theta B' & \Theta C' \\ \Theta X & \Theta Y & \Theta Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & g & n \\ -g & o & t \\ -n & -t & o \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & A' & X \\ B & B' & Y \\ C & C' & Z \end{vmatrix}$$

ove ciascun elemento del determinante a sinistra s'intende uguale all'elemento che occupa lo stesso posto nel prodotto *per linèe* dei determinanti a destra (nell'antica redazione v'è un cenno di questo 2° gruppo di formole di Frenet al § 97).

Il significato geometrico di g, n, t, è qui appena accennato, occorrendo per esso l'introduzione delle grandezze fondamentali di 2° ordine della superficie: a ciò provvede il cap. III° (curvature normali e curvatura Gaussiana) ove sono esposti i teoremi di Meusnier e di Eulero sul modo di variare della curvatura delle sezioni piane in un punto, poi le nozioni di tangenti di curvatura, di tangenti asintotiche e di tangenti coniugate. Chiude il capitolo (che corrisponde circa ai § § 9, 22 e 27 dell' " Einleitung ") la teoria della curvatura Gaussiana, della sua invarianza per flessioni (dandone l'espressione per le grandezze fondamentali di 1° ordine) e la formulazione dei due problemi dell'applicabilità: trovare le superficie che posseggono un dato elemento lineare; riconoscere se due superficie sono applicabili.

Il IV° capitolo è dedicato allo studio della curvatura tangenziale g; nell'esporre le diverse espressioni di cui è suscettibile l'A. presenta per la prima volta i simboli di Christoffel. Segue un'interpretazione geometrica del numero $1/g$; esso, in valore assoluto, rappresenta la distanza del punto che si considera dalla traccia sul piano ivi tangente della normale al piano osculatore alla curva (secondo la quale si calcola g) condotta per il centro di curvatura normale della curva stessa. È facile passare dalla curvatura tangenziale relativa alle curve di un sistema ∞^1 a quella delle traiettorie ortogonali.

La curvatura tangenziale di una curva della superficie non dipende che dalle grandezze fondamentali del 1° ordine e rappresenta perciò un invariante della superficie per flessione: si tratta di trovarne una rappresentazione analitica adeguata.

Con questa domanda entriamo nel problema fondamentale della teoria da questo punto di vista: il cap. V° (cfr. i §§ 60-71 dell' " Einleitung ") dà i fondamenti della teoria delle forme differenziali quadratiche.

Digitized by Google

L'esposizione della trasformazione di una o due forme quadratiche, dei loro invarianti e covarianti, dei simboli e delle equazioni di Cristoffel segue le linee ormai classiche: qua e là sono intercalate le applicazioni geometriche che vi si collegano.

Tutto ciò è premesso allo scopo di calcolare le derivate geometriche di una funzione dei punti della superficie secondo due elementi ortogonali di curve c, c'. Se c è definita da un'equazione differenziale lineare (ed è questo il caso più generale) queste derivate si esprimono per mezzo degli invarianti del ds^2 della superficie e di questa forma lineare: si generalizza il covariante di Christoffel (relativo al caso in cui questa forma differenziale sia $\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$) e si applica al calcolo della curvatura tangenziale di c e di c'. Sempre dalla stessa teoria discende l'espressione della torsione geodetica di c e il teorema di Enneper che la lega alla sua curvatura normale e alle curvature principali della superficie nel punto che si considera.

Con ciò è trovato il significato geometrico di tutte le grandezze che figurano nelle formole di Frenet relative alla curva c della superficie: per completare il quadro l'A. aggiunge un *sistema di formole (di Frenet generalizzate)* in cui le operazioni di derivazione del triedro di Frenet relativo a c (definito al cap. I°) vengono fatte nella direzione normale di c'. Nasce con ciò la questione di trovar l'equivalente per le derivate geometriche del teorema sulla permutabilità dell'ordine di derivazione delle derivate di una funzione di due variabili.

Le condizioni che debbono aver luogo fra i simboli $\Theta\Theta'$ e $\Theta'\Theta$ (relativi a c e c') si traducono, com'è mostrato nel capitolo VI° (cfr. i §§ 28 e 29 dell'« Einleitung ») nelle ordinarie equazioni di Gauss e di Mainardi-Codazzi fra i coefficienti delle due forme fondamentali della superficie. Questo capitolo (insieme al precedente che gli serve di preparazione) costituisce senza dubbio la parte più importante dell'opera: in esso la derivazione geometrica e le formole generali di Frenet danno, con notevole eleganza, quei risultati che ne giustificano l'introduzione nella teoria della superficie.

I tre capitoli successivi (VII°, VIII° e IX°) riposano il lettore con le applicazioni delle formole stabilite allo studio di questioni geometriche più elementari: sarebbe troppo lungo fermarvisi partitamente, e del resto non vi sono fatti nuovi da se-

Digitized by Google

gnalare nella teoria delle linee di curvatura, delle asintotiche, delle geodetiche e delle particolari superficie che vi si collegano, nella rappresentazione sferica e nel cenno sulle rigate (nell' " Einleitung " corrispondono al cap. VII° i § § 37-59, all' VIII° i § § 25-26 e al IX° i § § 31-33, 79-88). Il cap. X° — problemi nella teoria della deformazione — raccoglie varii resultati sulle superficie minime e di rotazione.

Il cap. XI° ci riconduce alla teoria delle curve sopra una superficie e serve di complemento a quanto nè stato detto al cap. II°: v'è data la rappresentazione sferica del triedro di Frenet, la derivata geometrica della curvatura normale e tangenziale. Più che altro notevole è lo studio delle grandezze fondamentali di 3° e di 4° ordine fatto generalizzando il procedimento di Christoffel per la costruzione di covarianti.

Segue poi un' ultima *estensione delle formole di Frenet* per un doppio sistema qualsiasi (non più ortogonale) di curve della superficie definito dall'annullarsi sia di una coppia di forme lineari sia di una forma quadratica.

Il cap. XII° è dedicato all' interessante ricerca degli invarianti e dei covarianti di flessione della superficie: la dimostrazione dell' esistenza e del numero di quelli fondamentali per un assegnato ordine e la loro costruzione è fatta per mezzo delle derivate geometriche.

Seguono due brevi capitoli, uno (XIII°) sulle forme fondamentali per la rappresentazione dei sistemi di rette, l' altro (XIV°) su alcuni speciali sistemi di curve e di superfici.

Termina così il testo dell' opera (pp. 1-606) essendo esaurito il compito propostosi dall'A. di dar forma invariantiva alla teoria delle superficie.

Come appare dall' esame qui fatto i cardini di questa esposizione (che si può dire opera quasi totalmente personale del Knoblauch) sono: *l'estensione delle formole di Frenet ad un triedro legato ad una curva della superficie, e l'estensione dei procedimenti di Christoffel a più forme lineari o quadratiche.*

Come opera di sistemazione è certo poderosa: e l'A. esprime con chiarezza a volta a volta ciò che gli consiglia l' introduzione di derminate operazioni e quale sia, per analogia con casi noti, la via da seguire. Il che facilita certo la comprensione del lettore attraverso la pesantezza dei calcoli.

Si può discutere, riguardo al metodo, se non ne siano preferibili altri, quello vettoriale p. es., che raggiungono lo stesso

Digitized by Google

intento di dar carattere intrinseco alla teoria. Ma la questione di metodo è spesso question di gusto ed è quindi inutile insistervi.

Prescindendo dall'interesse formale che ciascun metodo può avere, rimane a giudicarne il valore dai *fatti nuovi* ch'esso fornisce. Lo sforzo di questa nuova sistemazione è compensato da nuovi resultati, da nuovi elementi che meglio illuminino la costituzione della superficie? A quali vedute nuove e più penetranti dà luogo l'indirizzo dell'A.? La risposta non mi sembra troppo soddisfacente: perchè se le formole di Frenet dominano con notevole unità tutta la teoria e se, come appare, la teoria delle forme differenziali ne è la base naturale, le loro conseguenze, tradotte in simboli ordinari, riproducono in gran parte fatti già noti.

Un'altra osservazione di carattere generale si presenta dall'esame del contenuto: questo è di natura piuttosto elementare. Nulla da obbiettare perchè l'A. s'è proposto di scrivere dei " Grundlagen „. Ma potranno i suoi metodi servire ugualmente bene in campi più elevati ove già altri si sono cimentati con ottima riuscita? Ovvero, anche gettate le basi, gli sforzi per continuare la costruzione non saranno meno gravi?

Le ultime 28 pagine del volume sono destinate a renderne più facilmente penetrabile il contenuto: oltre ad una nota dei simboli usati e all'indice alfabetico conviene segnalare le estese e precise indicazioni bibliografiche: queste aumentano il pregio dell'opera e possono servire anche indipendentemente dal testo. L'A. non ha creduto opportuno ricordare i propri lavori: per comodità del lettore, a cui l'opera è destinata, indico qui appresso quelli che si riferiscono all'argomento.

ENRICO BOMPIANI.

Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie.
(Journal f. d. reine u. angew. Mathem., Bd. 103 (1888) pp. 25-29).
Ueber die Bedingung für die Isometrie der Krümmungskurven.
(Journal u. s. w., Bd. 103 (1888) pp. 40-43).
Ueber die geometrische Bedeutung der Flächentheoretischen Fundamentalgleichungen.
(Acta Mathematica, Bd. 15 (1891) pp. 249-257).
Ueber Biegungscovarianten.
(ibid., Bd. 111 (1893) pp. 277-289).
Zur Theorie der Differentialparameter.
(ibid., Bd. 111 (1893) pp. 329-343).

Digitized by Google

Zur simultanen Transformation quadratischer Differentialformen.
(ibid., Bd 115 (1895) pp. 185-200).

Ueber den Beweis der Christoffelschen Kovarianz.
(Sitzungsber. Berliner Mathem. Ges., 1, pp. 63-66).

Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln.
(ibid., 2, pp. 6-10).

Die geodätische Krümmung der Krümmungslinien.
(ibid., 2, pp. 61-65).

Der Gausssche Satz vom Krümmungsmass.
(ibid., 3, pp. 76-82).

Grundformeln der Theorie der Strahlensysteme.
(Verh. d. 3. intern. Math. Kongress, Heidelberg (1904), pp. 373-374).

Der innere Zusammenhang der Flächentheoretischen Grundformeln.
(Journ. u. s. w., Bd. 130 (1905) pp. 113-143).

Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung.
(ibid., Bd. 131 (1906) pp. 247-264).

Zur Abzählung der Biegungskovarianten.
(Leipziger Ber., Bd. 59 (1907) pp. 372-377 .

Der Bonnetsche Ausdruck des Krümmungsmasses.
(Sitzungsberiche u. s. w., 8, pp. 72-78).

Ueber die Kennzeichnung von Linienelementen spezieller Form durch Gleichungen zwischen Biegungsinvarianten.
(ibid., 8, pp. 116-121).

Geometria descrittiva.

G. Loria. — *Vorlesungen über Darstellende Geometrie. — Zweiter Teil: Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven und Flächen.* — Leipsig u. Berlin, Teubner. 1913. 8°, p. XII + 294. [Geh. n. M. 11. - geb. n. M. 12].

Questo secondo volume delle lezioni del prof. Loria tratta nei suoi tre Libri successivi, delle *figure poliedriche*, delle *curve*, delle *superficie*, e per ciascuno di codesti argomenti fornisce uno studio monografico, che, in ordine alle esigenze di una prima fondamentale coltura geometrica, può ben dirsi completo. Già nel dar notizia, su questo *Bollettino*, del primo volume ebbi a rilevare come, nella delimitazione e nell'ordinamento della materia e nella scelta dei metodi, l'A., fra le vedute rigidamente proiettive e la concezione tecnica della Geometria descrittiva, avesse assunto una posizione intermedia. Ora siffatto eclettismo

Digitized by Google

di criteri e di metodi trova in questo secondo volume un più largo campo di esplicazione e approda, per ogni singolo argomento, ad una elaborazione sintetica, informata e caratterizzata da un libero e largo uso dei diversi procedimenti geometrici, non soltanto descrittivi, ma altresì analitici e infinitesimali, che volta a volta meglio rispondono alla natura delle questioni.

Per tale varietà di metodi vi è meno luogo a manifestarsi, in ragione della natura stessa dell'argomento, nel primo libro (pagg. 1-60), che trattando degli angoloidi e dei poliedri ha carattere essenzialmente elementare. Pur giova rilevare come anche qui l'argomento sia perspicuamente illustrato sotto i suoi diversi aspetti: così l'A. da una esauriente discussione dei vari problemi sulla costruzione dei triedri, deduce le formule fondamentali della Trigonometria sferica, e, raccogliendo in una limpida trattazione le classiche proprietà generali dei poliedri, ne applica i risultati ai casi particolari più notevoli, non trascurando i poliedri archimedei e quelli stellati del Poinsot. Quanto alla rappresentazione descrittiva e ai relativi problemi fondamentali, la parte maggiore viene assegnata, naturalmente, al metodo del Monge, ma è pur fatto opportunamente luogo alla proiezione centrale e, in particolare, alla proiezione quotata, il cui uso torna talvolta opportuno nei problemi di intersezione con piani.

I criteri informatori di queste lezioni si mostrano pienamente in atto nel secondo Libro (pagg. 61-139), che in due capitoli di svolgimento parallelo, tratta delle curve piane sghembe. Qui la parte generale è svolta con larga varietà di metodi analitici e sintetici, con equilibrato contemperamento di processi infinitesimali e deduttivi e di spedienti grafici e approssimati; e la teoria viene illustrata, sopratutto nei riguardi della rappresentazione descrittiva, traverso una ricca serie di esempi concreti di curve, abilmente scelte a mettere in luce le molteplici particolarità possibili e i vari procedimenti che nei diversi casi si presentano come più naturali e vantaggiosi. Degno di speciale menzione è il gruppo di semplici ed eleganti costruzioni approssimate per la tangente, la normale e il circolo osculatore degli archi di curve piane graficamente tracciate: e fra gli esempi di curve sghembe va ricordata la *Spirale* di Pappo, che qui per la prima volta viene assunta ad illustrare la teoria generale e sotto tanti rispetti porge particolarità geometriche interessanti e significative.

Secondo un disegno perfettamente analogo è impostato e svolto il terzo Libro (pagg. 140-294), nel quale, dopo una chiara

Digitized by Google

e ordinata esposizione delle proprietà fondamentali delle superficie e in particolare delle algebriche, sono stabiliti i principi generali della rappresentazione descrittiva, secondo i vari metodi, e vengono studiate, nei loro aspetti caratteristici e nei casi particolari più notevoli, le consuete classi speciali di superficie: quadriche, coni e cilindri, rigate, superficie di rotazione, elicoidi. Ai singoli metodi descrittivi si ricorre mano mano che il naturale svolgimento delle deduzioni geometriche ne offre la opportunità: così se ad essi viene in qualche modo diminuita la parte di protagonisti, d'altro conto, nel confronto con gli altri metodi, ne risultano meglio chiarite la natura e la portata. Ad essi non vien chiesto se non quanto possono per se stessi effettivamente dare, e vengono in special modo evitati sistematicamente quei sedicenti processi costruttivi, che, riducendo l'uno all'altro problemi ugualmente refrattari ad una soluzione grafica, sono destituiti di ogni pratica utilità. — Pur nei riguardi della praticità delle costruzioni è degna di rilievo la tendenza dell'A. ad abbandonare pei dati ipotetici dei problemi certe forme e posizioni troppo particolari ed artificiose, per sostituirvi, sempre quando non si aggravi la complicazione del processo pratico, ipotesi quanto è più possibile generali e rispondenti alla forma, in cui sogliono presentarsi le questioni concrete.

Così, per la cura diligente del dettaglio, non meno che pel meditato disegno generale, le Lezioni del prof. Loria costituiscono una eccellente opera didattica, che, nella edizione italiana già apparsa in luce, riuscirà largamente vantaggiosa alle nostre scuole universitarie. Io per mia parte debbo attestare che, avendo in questi ultimi anni assunto l'insegnamento simultaneo dei tre corsi geometrici del primo biennio, ho tratto dalle lezioni del prof. Loria nuovi impulsi e preziosi sussidi al tentativo di raccogliere e coordinare, all'infuori della partizione tradizionale, tutta la geometria propedeutica in un corso biennale ben connesso e coerente, pur nella varietà dei metodi, per la unità della veduta generale. UGO AMALDI

Determinanti.

F. CALDARERA. *Trattato dei Determinanti.* Palermo, Virzi, 1913. 8° pag. 255. (Prezzo L. 7).

Il *Bollettino* ebbe già parecchie volte occasione di occuparsi del prof. Caldarera come autore di pregevoli scritti di Meccanica

Digitized by Google

e di Geometria (v. T. IX, I 1906, p. 76-77; T. XI, 1908-09, p. 6-7; T. XIII, 1911, p. 33-34). Oggi il suo nome si ripresenta su queste colonne come quello d'un autore di un lavoro di pura algebra. Il tema da lui scelto ha dato materia ad un grande numero di esposizioni metodiche, alcune delle quali veramente ottime; ora il nuovo trattato non è riproduzione di alcun altro; a dimostarlo basti dire che, primo del genere (a quanto ci consta) contiene una trattazione dei Determinanti infiniti, nuovi elementi analitici che, dopo i lavori di Poincaré, v. Koch ed Hilbert, non possono venire ignorati da nessuno che aspiri a seguire l'attuale movimento matematico ed eventualmente ad accelerarne il progresso. Oltre a ciò nel libro del prof. Caldarera non manca alcuno degli argomenti che ritengono ingredienti essenziali della teoria dei determinanti, nè alcuna delle applicazioni all'algebra ed alla geometria che rendono necessario a tutti i matematici di rendersi famigliari col maneggio di quell'ammirabile strumento.

Onde (per concludere!) con la presente pubblicazione l'A. ha saputo accrescere di una le sue già cospicue benemerenze verso la scienza e l'insegnamento. E poichè, in un'età nella quale molti si considerano in diritto di concedersi un meritato riposo, egli si mostra costantemente infiammato da un sacro entusiasmo per la scienza a cui consacrò la propria nobile esistenza, noi non possiamo che rivolgergli il fervido augurio: " ad multos annos! „.

G. L.

Tavole di logaritmi.

Tables de logarithmes à 3 quatradres et nombres correspondants avec 12-13 *chiffres. Sistème normal du* Docteur AUGUSTE GUILLEMIN. *Ougrage honoré d'une subvention de l'Association française pour l'avancement des Sciences, précédé d'une Introduction donnant la construction et l'usage des Tables, suivi d'une. Note complémentaire montrant leur utilité éventuelle.* Paris, Gauthier-Villars, 1912. 8° gr. (Prezzo fr. 6).

Si tratta di logaritmi a 4, 8, 12, decimali; le segnaliamo ai nostri lettori che debbone seguire calcoli numerici; essi soltanto, dopo ripetute prove, potranno giudicare di quanto la nuova pubblicazione superi le analoghe anteriori congeneri.

G. L.

Digitized by Google

Funzioni iperboliche.

P. MANSION. *Abriss der Theorie der Hyperbelfunctionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunctionen.* Leipsig. B. G. Teubner 1913. 8°, p. 44 (Prezzo Mk. 1.25).

Le funzioni iperboliche sono di data ormai antica, essendo state inventate da V. Riccati (1707-1775); esse godono di proprietà analoghe a quelle delle funzioni circolari e che si stabiliscono con procedimenti elementari; finalmente esse trovano applicazione nel calcolo integrale e nella geometria: malgrado ciò, conseguirono limitata diffusione fra i giovani matematici. Ad ovviare a tal fatto, che l'A. non a torto reputa deplorevole, è inteso il volumetto il quale, dopo tre edizioni francesi, si presenta ora sotto veste tedesca. Richiamando sopra tale pubblicazione l'attenzione dei lettori del *Bollettino*, noi intendiamo di aiutare, nel limite delle nostre forze, a fare ottenere a quelle funzioni un posto in *tutti* i trattati di analisi matematica.

Premesso un cenno storico sulle origini e sui principali cultori della teoria delle funzioni iperboliche, l'A. le definisce mediante la funzione esponenziale e ne stabilisce le principali proprietà, facendo anche conoscere la disposizione delle Tavole dell'Hoüel e le varie notazioni con cui vennero rappresentate. Segue l'esposizione del legame fra dette funzioni e l'iperbola equilatera, poi le formule di differenziazione ed integrazione e gli sviluppi in serie relativi ad esse. Fra le applicazioni analitiche esposte dall'autore notiamo una nuova formola di risoluzione dell'equazione cubica $x^3 + q\,x + r = 0$ relativa al caso $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} > 0$, mentre le applicazioni geometriche cominciano da considerazioni relative ad un'iperbola qualunque per finire con la trigonometria pseudo-sferica.

Emerge da questi cenni che l'A. ha saputo condensare in poche pagine tutto quanto di essenziale si conosce intorno alle dette funzioni; lo stile è stringato ma chiaro ed elegante, onde, se l'abilità dell'avvocato è garanzia dell'esito di una buona causa, non vi può essere dubbio intorno al giudizio che i matematici pronuncieranno intorno alla tesi sostenuta dall'eminente matematico belga.

G. L.

Digitized by Google

Notizie.

Le opere di A. Volta. Con fondi votati dal Parlamento e sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo si sta preparando un'edizione completa delle opere di Alessandro Volta, capace di soddisfare i giusti desideri degli studiosi. Siccome è in animo della Reale Commissione che dirige tale lavoro di pubblicare anche il carteggio del sommo fisico comasco, così tutti coloro che posseggono qualche sua lettera sono vivamente pregati di darne notizia al prof. Luigi Volta (membro di quella commissione) dirigendo al R. Osservatorio astronomico di Brera, Milano.

*
* *

La Matematica in Germania in questo ultimo quarto di secolo. Nell'opera *Deutschland unter Kaiser Wilhelm II*, pubblicata in occasione del compimento del XXV anno di regno dell'attuale imperatore, l'articolo dedicato alla Matematica fu scritto da E. Lampe e merita di essere segnalato ai lettori del *Bollettino*. Dopo un cenno intorno al " Catalogo internazionale della letteratura scientifica „ ed ai Congressi internazionali, il dotto professore del Politecnico di Berlino parla della fondazione della Società matematica tedesca, della grande Enciclopedia matematica e poi delle altre società e delle nuove riviste di recente fondate. Passando poi ad occuparsi delle recenti pubblicazioni, esamina le opere tedesche di maggior mole sulla storia della matematica ed enumera le " opere complete „ di grandi matematici che vennero pubblicate o che sono in corso di stampa; fa poi cenno dei progressi che, per opera dei suoi compatrioti, vennero compiuti dai vari rami della nostra scienza: aritmetica, teoria degli invarianti, determinanti, teoria dei gruppi, algebra, funzioni algebriche, teoria delle funzioni, calcolo delle variazioni, equazioni differenziali ed integrali, teoria delle funzioni ad una o più variabili, principi della geometria, geometria sintetica, analitica e differenziale, geometria della retta, geometrica pluridimensionale, teoria delle trasformazioni geometriche. Nel breve giro di 24 pagine il Lampe ha saputo riassumere in modo espressivo completo l'opera compiuta dai matematici tedeschi nei venticinque anni testè decorsi.

Digitized by Google

*
* *

Sofia Germain. Questa simpatica figurina muliebre, che occupa un posto nella biografia di Gauss, ha di recente attratta la attenzione di un geniale cultore della storia delle matematiche M. Simon; il quale ad essa consacrò un succoso articolo inserito nel volume dedicato a A. H. A. Schwarz in occasione dell'anniversario della sua laurea dottorale (6 Agosto 1914), articolo in cui è fatta rilevare la parte importante che ebbe quella donna nel rinnovamento filosofico avvenuto in Francia nella prima metà del secolo XIX e di cui d'ordinario si attribuisce il merito principale, se non esclusivo, ad Augusto Comte.

*
* *

Un precursore di Grassmann. Fra coloro che tentarono di concretare le vaghe idee di Leibuis intorno ad un calcolo capace di servire ad investigare le proprietà geometriche dello spazio, a torto non viene ricordato Samson Michel (1753-1814) che, al principio del secolo scorso pubblicò parecchi opuscoli su tale argomento, i quali ebbero accoglienze oneste e liete da parte dell'Istituto di Francia (v. *Institut de France, Académie des Sciences.* Procés-Verbaux. T. II. p. 611 e 695). Sarebbe interessante oggi riesaminarli per determinarne gli eventuali punti di contatto con le congeneri ricerche posteriori; il loro elenco si trova nell' *Handwörterbuch* del Poggendorff.

*
* *

Per la storia della strofoide. Nell' articolo inaugurale di questo *Bollettino* furono segnalate (T. I, 1898 p. 2 e 5) le ricerche di Casali (1757) e A. Quetelet (1819) sopra la strofoide, considerata come curva focale di un cono o di un cilindro retto. Ora si può aggiungere che sul cadere del secolo XVIII, un certo Boulet (personaggio del tutto ignoto) presentava all'Istituto di Francia una memoria contenente analoghe considerazioni; Legendre e Cousin, incaricati di esaminarla esprimerono l'avviso " que la Classe doit acceuillir favorablement le premier fruit des travaux d'un mathematicien qui cherchè d'augmenter le nombre des verités connues „ (v. *Istitut de France. Académie des Sciences, Procés-Verbaux*, T. II. Paris 1912, p. 80).

Digitized by

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

Storia (G. L.), pag. 1-7.
Funzioni di Linee (E. E. Levi), pag. 7-15.
Calcolo Vettoriale (Matteo Bottasso), pag. 15-20.
Geometria differenziale (E. Bompiani), pag. 20-26.
Geometria descrittiva (Ugo Amaldi), pag. 26-28.
Determinanti (G. L.), pag. 28-29.
Tavole di logaritmi (G. L.), pag. 29.
Funzioni iperboliche, (G. L.), pag. 30.
Notizie Le opere di A. Volta; La matematica in Germania in questo ultimo quarto di secolo: Sofia Germain; Un precursore di Grasmann; Per la storia della stofoide, pag. 30-31.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

BOREL. — Introduction géometrique à quelques theories physiques. L. 5,50.
BRAUDE. — Les coordonnées intrinsèques. L. 2,25.
CASTELNUOVO. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III, L. 15.
DOLBNIA J. — Oeuvres mathématiques pubblié par Kriloff. L. 12,50.
ENRIQUES. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
GUILLAUME. — Les récents progrés du système metrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: SANDEN. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: HJELMSLEV. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
HAUSDORFF. — Grundzüge der Mengenlehere. L. 23,50.
SALPETER. — Einfürung in die höhere Mathematik, L. 15,50.
SMITH e MIKAMI. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
ZEUTHEN. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

Digitized by Google

N. 2 PERIODICO TRIMESTRALE 1915

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI
GINO LORIA

ANNO XVII
1915

II FASCICOLO

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1915

Pubblicato il 20 maggio 1915.

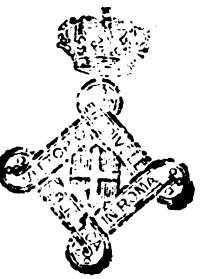
Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVII, Fasc. II: **Aprile, Maggio e Giugno** 1915

UN MATHÉMATICIEN BELGE DU XVI^IÈME SIÈCLE: JEAN TAISNIER

Note de LUCIEN GODEAUX *(à Liège)*



Dans son « *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques chez les Belges* » (1), AD. QUÉTELET cite, parmi les personnages qui se sont occupés de Mathématiques, un certain JEAN TAISNIER dont il énumère toute une série de publications. Récemment, MM. J. DEWERT et M. SOONS (2) ont tâché d'éclaircir les ténèbres qui enveloppaient la vie de Taisnier ; je voudrais résumer rapidement, pour les lecteurs du *Bollettino*, les résultats auxquels ils sont arrivés.

1. — Jean Taisnier naquit à Ath, petite ville du Hainaut Belge, le 2 septembre 1508. Il eut une vie très mouvementée. D'abord comme chantre, puis comme précepteur des enfants à la chapelle de CHARLES QUINT, il suivit ce prince en Espagne et même aux sièges de Tunis et d'Alger. Il passa ensuite en Italie où il publia divers ouvrages et professa dans différentes Universités. On le retrouve plus tard en Belgique et finalement à Cologne. M. DEWERT croit que l'on peut placer l'époque de sa mort vers 1562.

De ce que Taisnier dit dans la préface de ses ouvrages, il résulterait qu' il fut professeur de Mathématiques à l'Université de Rome en 1546 et 1547, à celle de Ferrare en 1548 (3), à celle

(1) Bruxelles, Hayez, 1864.

(2) JULES DEWERT: *Jean Taisnier.* — MODESTE SOONS: *Jean Taisnier, mathématicien* (Annales du Cercle Archéologique d'Ath et de la région, 1912, tome I).

(3) Il semble que Taisnier a vraiment été professeur à l'Université de Ferrare. Voir à ce sujet une *Note sur Jean Taisnier* (Annales du Cercle Archéologique d'Ath, 1914, tome II)

Digitized by Google

de Bologne, à Padoue, à Palerme et à Venise. Il dit même avoir eu, dans plusieurs de ces villes, plus de *trois cents* auditeurs, ce qui est d'ailleurs peu probable et ce qui a excité les railleries de ses contemporains.

De 1555 à 1557, on trouve Taisnier à Lessines (Hainaut Belge) à la tête d'une école qu'il a fondée. Enfin, à partir de 1558, il est à Cologne, où il donne d'abord des leçons et est ensuite attaché à la chapelle de l'archevêque JEAN GEBHARD.

2. — M. J. DEWERT a pu dresser une liste des ouvrages de Taisnier comprenant onze numéros. Nous croyons utile de la donner en entier, en abrégeant cependant le titre lorsqu'il est trop long et que l'ouvrage ne se rapporte pas aux Mathématiques.

I.° — *Joa. Taisn. Hanonii, poetae, in almo Ferrariensi gymnasio mathematices profess. publ. oratio hab. ipsis idibus novembr. a. D. 1547. Esd. de compositione s. fabrica et usu sphaerae nonnulla compendiose narrata. Aliquot praeterea ads. sunt epigrammata. Ferr. in aed. Joa. de Bugloat et Ant. Hucher sociorum mense martii 1548*, in 8°.

Cet ouvrage est cité par GRAESSE (1), mais n'a pu être retrouvé par M. J. DEWERT. Il ne se trouve pas à même la Bibliothèque de Ferrare, ainsi que M. G. AGNELLI, le distingué directeur de cette Bibliothèque, a bien voulu me le faire savoir.

II.° *A Booke concerning navigation transl. into engl. by Rich. Eden. London. R. Jugge*, s. d. in 4°.

Cet opuscule est également signalé par GRAESSE, mais n'a pu, lui non plus, être retrouvé.

III.° — *Opera nuova molto utile, et necessaria à tutti architettori, geometri, cioè misuratori de terra, astronomi, & tutti altri virtuosi, novamente ricognita, per il molto excellente mathematico Giovanni Taisnier hānonio.*

In Ferrara nella stampa di Giovanni de Bulhat & Antonio Hucher, compagni, nel mese d'Aprile 1548.

IV.° — *Joannis Taisnier Hannonij de usu annuli sphaerici libri tres in quibus quicquid ad Geometricae perfectionem requiritur continetur.*

Panhormi apud Sanctum Dominicū. M. D. L.

V.° — *Caesareae majestatis Caroli V invictissimi quōdam sacellanus cantor domesticus, puerorumq; sacelli paedagogus, Joannes*

(1) *Trésor de livres rares et précieux*, Dresde, 1849.

Digitized by Google

Taisnier Hānonius utriusq; Juris D. Poëta laureatus, Mathematicus, de sphaerae materialis fabrica & usu 128. canonum tituli, . . .

Coloniae, Excudebat Joannes Bathenius, anno 1558.

Taisnier se borne, dans cet opuscule de 12 feuillets, à annoncer la publication d'un ouvrage sur la sphère.

VI.° — *Astrologiae judiciariae Ysagogica . . Autore Joanne Taisnier Hannonio, . . Coloniae, Apud haeredes Arnoldi Birckmanni, Anno 1559.*

VII.° — *Joa. Taisnier Hannonii Poëtae laureati illustriss. Ac reverendis. Card. de Burgos Mathematici de Mathematicae quattuor quātitatū utilitate libellus.*

Opuscule de huit feuillets, sans lieu ni date.

VIII.° — *Joannis Taisnier Hannonii utriusque juris D. Poetae Laureati, Mathe. De usu sphaerae materialis, . . . Coloniae Excudebat Joannes Bathenius, Anno a Cristo nato M. D. LIX.*

C'est le développement de l'opuscule n.° V. On n'y trouve cependant que 80 règles au lieu des 128 annoncées par Taisnier.

IX.° — *Joannis Taisnier Athensis poëtae laureati, utriusq; Juris doctoris, de annuli sphaerici fabrica & . . . usu. Antverpiae, In edibus Joannis Richardi. Anno 1560.*

C'est une deuxième édition du n.° IV.°

X.° — *Opus mathematicum octo libros . . Authore D. Joanni Taisnier . . Coloniae Agrippinae. Apud. Joannem Birckmannum & Wernerum Richwinum. Anno Salutis M. D. LXII.*

C'est un gros in-folio de plus de six-cents pages, consacré à la Chiromancie et à l'Astrologie; malgré son titre, il est absolument étranger aux Mathématiques.

Cet ouvrage eut une seconde édition, parue sous le même titre, à Cologne, chez Th. Baumium, en 1583.

XI.° *Opusculum Perpetvo memoria dignissimum de natura magnetis, et eius affectibus.*

De motu continuo.

Item { *Demonstratio proportionû motuum localium, contra Aristotelem & alios Philosophos.*

De motu alio celerrimo, hactenus incognito.

Authore Joanne Taisnierio . . . Coloniae. Apud Joannem Birckmannum. Anno M. D. LXII.

Ajoutons que Taisnier a été accusé d'avoir copié une grande partie de son *Opus Mathematicum* dans un ouvrage de Barthélemy Cocles, de Bologne, son *traité sur l'aimant* dans un

Digitized by Google

ouvrage du Français PIERRE PÈLERIN, enfin son opuscule *Demonstratio proportionum motuum* . . dans un ouvrage de J. B. BENEDICTI. Ces ouvrages ne nous intéressant que secondairement ici, nous renverrons pour plus de détails à l'étude de M. J. DEWERT.

3. — M. SOONS a analysé les ouvrages n. IX° et XI° de Taisnier. Le premier de ces ouvrages seul a trait aux Mathématiques.

Le traité " *De annuli sphaerici fabrica & usu* „ n'est pas, fait remarquer M. SOONS, une exposition de découvertes personnelles mais bien un traité didactique fait même avec beaucoup de soins.

Taisnier construisit le premier l'anneau sphérique de telle manière qu' il pût se replier sur lui-même, ce qui en rendait le transport plus aisé.

L'emploi de l'anneau sphérique fait l'objet de l' ouvrage de Taisnier. On y trouve la mesure de hauteurs et de distances, le nivellement, notamment un problème qui est résolu d'une manière qui revient à l'emploi de la formule trigonométrique

$$h = \frac{a}{\cot B + \cot C} .$$

donnant la hauteur d'un triangle.

On trouve également la détermination de l'heure, du méridien, etc., et enfin l'emploi de l'anneau en artillerie.

M. SOONS dit, à propos de ce livre : " Un classique fait avec autant de soins à notre époque, serait couvert d'éloges „. Il convient d'ajouter que Taisnier ne fut jamais accusé d'avoir plagié à propos de ce livre.

Paris, 6 mai 1914.

La corréspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le

Dr. J. H, GRAF, *Professieur à l'Université de Berne*

Comme j'ai eu l'honneur de publier " der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli „ dans les *Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern 1896*, et " der Briefwechsel zwischen Arthur Cayley und Ludwig Schläfli „ dans les mêmes *Mittheilungen*, il m'est possible, grâce à l'amabilité de M. le prof. Gino Loria - dircteur de ce journal, - de publier à

Digitized by Google

présent la correspondance de Ludwig Schläfli avec des mathématiciens italiens de son époque. Les savants italiens sont: D. Chelini, E. Beltrami, F. Casorati, L. Cremona, P. Tardy, G. Battaglini et P. Blaserna. Nous possédons à Berne seulement les lettres de ces savants à Ludwig Schläfli et quelques projets de lettres de Schläfli à Casorati et Beltrami. Nous croyons quand même que ces lettres ont une certaine valeur pour l'histoire des sciences mathématiques; cependant il y a aussi des affaires privées d'aucune valeur pour le progrès de la science. Néanmoins nous y tenons de publier ces lettres *in extenso*, car elles démontrent les relations cordiales que Schläfli a eu avec les mathématiciens italiens.

I.

Lettres de D. Chelini à L. Schläfli, 1844-1845.

Quoique nous ne possédons que des lettres de D. Chelini des années 1844-45, L. Schläfli appréciait beaucoup ce mathématicien. Il avait fait sa connaissance à Rome avec Steiner, Jacobi et Dirichlet, lui conservait une grande amitié et, après la mort de Chelini, il contribua, sur l'invitation de Beltrami, aux " Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini „ (Mediolani, 1880) avec le travail " Einige Bemerkungen über die Lamé 'schen Functionen „ (p. 277-88; daté 30 Nov. 1880), travail auquel il ajouta encore un autre " Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen über die Lamé 'schen Functionen „ publié dans les " Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei „, Ser. I^a, Vol. IV „.

Chelini Domenico, né le 18. X. 1802 à Gragnano près de Lucca, mort à Rome le 16. XI. 1878, signait tou jours " D. Ch. delle Scuole Pie „ où il fut très-jeune Padre, il faisait ses études 1819-1826 au Collegio Nazareno à Rome, et plus tard il enseignait les mathématiques à Narni, Pievi et à Alatri, retournait en 1831 au Collegio Nazareno, il fut ensuite 1851 professeur de mécanique et de hydraulique à l'Université de Bologna, destitué de son poste (1864) comme partisan du pape, 1865-71 prof. à l'Archiginnasio de Rome et jusqu'a sa mort à l'Università vaticana.

Il publia beaucoup de travaux dans les *Annali di matematica* de Tortolini, dans les *Memorie dell'Accademia di Bologna*, dans

Digitized by Google

le *Giornale Arcadico di Scienze e Lettere*, dans la *Raccolta Palomba*, dans les *Atti dell'Accademia dei Lincei*. Ils traitent en général des sujets de mécanique et des courbes.

Les lettres à L. Schläfli se rapportent principalement au séjour de Steiner, Dirichlet, Jacobi et Schläfli à Rome et la traduction en italien et la publication des ouvrages de Steiner dans le *Giornale Arcadico*, spécialement sur l'impréssion du mémoire " Del baricentro di curvatura delle curve piane ", que Schläfli avait traduit de l'allemand en italien et qui a paru dans les volumes 101, p. 237-280 et vol. 102, p. 1-31, de ce récueil.

Lettre n°. 1.

" *Stimatissimo Signore*

" Mi è giunta molto gradita la lettera che Ella si è compiaciuto d'indirizzarmi per darmi le sue nuove. Mi rincresce però di non poterLe ancora mandare stampata la traduzione, da Lei fatta, della classica memoria del sig. Steiner. Il piccolo *giornale arcadico,* trovandosi impegnato a pubblicare altre cose di lettere, scienze ed arti, sin qui non l'ha potuto ricevere: io spero che si comincerà a stampare a Novembre.

" Ora Le mando i teoremi del sig. Steiner sulle coniche, un articoletto sulle formule dinamiche del sig. Hamilton, e i fogli di due esercizi di matematica elementare e di geometria analitica, dati in questo Coll.° da miei scolari.

" Il sig. Dirichlet è da pochi giorni qui giunto da Napoli colla moglie incomodata dall'itterizia: in breve partirà per Firenze e proseguirà il suo viaggio verso Berlino.

" Quando avrà la bontà di scrivermi, mi dia notizie del signor Steiner e della sua salute: se poi Le si offerisse l'occasione di vederlo o di scrivergli, gli dica da mia parte le più care e affettuose parole che sa.

" Intanto mi voglia bene, e se valgo in alcuna cosa, mi adoperi liberamente: chè mi troverà quale con vera stima mi rassegno

" Roma, dal Coll.° Nazareno
5 Settembre 1844.

Suo aff.mo Amico
Domenico Chelini delle
Scuole Pie ".

La lettre était accompagnée par des imprimés que D. Chelini envoyait par l'intermédiaire du Consul suisse à Rome M. Bégré

Digitized by Google

et de la maison Miescher et Cie à Berthoud, à L. Schläfli, qui était alors maître des mathématiques et physique au progymnase de Thoune (Canton de Berne).

Lettre n°. 2.

" *Pregiatissimo Signore*

" Ecco finalmente stampata, o Signore, la vostra traduzione del trattato del sig. Steiner sul baricentro di curvatura. Io avrei voluto che si fosse stampato subito, ma questo benedetto giornale arcadico si è fatto un poco ritroso nel ricevere le cose di Matematica. L'edizione, come potete osservare, Signore, è venuta sufficientemente corretta: se vi sono rimaste alcune piccole mende, esse non sono tali da arrestare un discreto lettore: convien considerare che io era solo nell'assisterla, nè senza molte altre occupazioni.

" Il sig. Dirichlet, che, sebbene indisposto di salute, volle partire da Roma nell'Ottobre 1844, ha avuto in Firenze una seria malattia, donde però si è pienamente ristabilito, ed è partito per Berlino nel prossimo passato Aprile. Egli ha avuto la compiacenza di scrivermi, e mi ha dato buone notizie del sig. Jacobi, il quale si è fissato in Berlino.

" Vi mando, Signore, quindici copie della Vostra traduzione, e ne mando altrettante al sig. Steiner per mezzo di un Signore Prussiano che è in procinto di partire per Berlino.

" Intanto mi dò l'onore di essere colla più distinta ed affettuosa stima

" Vostro U.mo Amico e Servo Domenico Chelini
delle Scuole Pie.

" Roma dal Coll.° Nazareno
6 Maggio 1845 ".

Lettre n°. 3.

" *Pregiatissimo Signore*

" Mancatami, per alcune circostanze, l'occasione di inviare in Berlino al sig. Steiner le 15 copie della sua traduzione, ho pensato di mandarle tutte a Lei, sembrandomi cosa più conveniente che il traduttore medesimo diriga all'autore quelle copie che crede della propria traduzione.

Digitized by Google

" Spero quindi che Ella non mi saprà mal grado della mia nuova risoluzione. La prego, scrivendo al sig. Steiner, d'includergli i miei più cordiali saluti ed ossequj. Io mi trovo in uno stato di grandissima afflizione, essendomi avvenuta una grave disgrazia per troppa bontà di cuore. Preghi Iddio che abbia misericordia di me. Io sono con tutta la stima ed affetto

" Dal Coll.° Nazareno
Roma 21 Maggio 1845

" Il suo Dev.mo Servo ed Amico
DOMENICO CHELINI d. Scuole Pie.

" P. S. La prego in amicizia di non far cenno alcuno al sig. Steiner di ciò che le ho detto intorno al mio stato ".

Storia

GINO LORIA. *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* II edizione totalmente riveduta. P. XXIV-974, Milano, Hoepli, 1914 [Prezzo del vol. leg. L. 9,50].

L'opera del Loria, ora pubblicata in un nitido volume dei Manuali Hoepli, aveva visto la luce in una sua prima redazione in una serie di scritti inseriti nelle *Memorie della R. Accademia delle scienze, lettere ed arti di Modena* durante il decennio 1893-1902. L'autore, dieci anni dopo la fine di questa prima edizione, ha ripreso in complesso il suo scritto, l'ha notevolmente modificato, portandolo al corrente dei non pochi studî attuali, e ne ha fatto un volume di importanza fondamentale per lo studio della matematica greca.

Quella sezione della storia delle scienze che si occupa dell'antica Grecia è oggidì per varie ragioni singolarmente sviluppata e questo avviene in particolare per la parte matematica. Paul Tannery, Cantor, Heiberg, Zeuten, Heath, sono i nomi che, pensando a questo soggetto, ci corrono subito alla memoria. A questi bisogna aggiungere anche quello di Gino Loria che con le sue numerose memorie speciali, quest'opera sintetica e complessiva e varî suoi scritti, si mostra uno dei conoscitori migliori di questo meraviglioso periodo. Ed un'opera come questa occorreva. Frammentarie sono le memorie del Tannery, e questo carattere è anche rivestito anche dalle sue opere più organiche

Digitized by Google

quali il " Pour l'histoire de la science hellène „, la " Géométrie grecque „, le " Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne „ ; particolari e specialmente rivolte all'interpretazione di un grande o all'esame di un determinato soggetto sono i lavori di altri, contemporaneamente grecisti e matematici ; già invecchiata e quà e là errata nella concezione generale e nei particolari è l'opera de Moritz Cantor che, non ostante gli appunti troppo acri dell'Enestrom, ha il merito grande di avere compreso in una grande sintesi la storia delle discipline matematiche e di averne favorito lo sviluppo, creando un monumento sul quale gli storici presenti e futuri devono e dovranno appoggiarsi, sia ampliandolo in certe parti, sia distruggendolo in quelle caduche. Ma un'opera come quella del Loria, completa nell'esposizione dettagliata di tutto il periodo considerato, al corrente di tutti i più recenti studi e dettata da chi ad una conoscenza profonda della matematica unisce quella della lingua di Euclide e di Archimede, mancava ancora. E nel dire ciò osservo che non si poteva fare assegnamento sulle antiche memorie che, anche astraendo dagli anni che già portavano, erano sparse in una pubblicazione accademica e difficilmente erano trovabili.

La storia del Loria è divisa in cinque libri. Il primo considera " I geometri greci precursori d'Euclide „, e tratta quindi dei così detti presokratici, di Platone e di Eudosso, e di quelli che fanno capo all'Accademia ed alla scuola di Cizico. Il secondo tratta del " Periodo aureo della Geometria greca „. Euclide, Archimede, Eratostene, Apollonio sono i grandi nomi che attirano l'attenzione in questa parte dell'opera. Il libro terzo esamina " Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci „. Esso è particolarmente interessante perchè esaminando in modo speciale la serie delle concezioni astronomiche, dalle primitive a quelle di Tolomeo, ne scruta accuratamente la parte matematica. Oltre l'astronomia sono naturalmente prese in esame l'ottica, la geodesia, la meccanica, ed in particolare la statica e tutta l'opera così importante di Erone alessandrino. Il libro quarto considera " Il periodo argenteo della Geometria greca „ e quì compariscono i nomi di Gemino, Teone, Pappo, dei Neoplatonici, di Eutokio e di Sereno, L'ultimo libro infine esamina " L'aritmetica dei Greci „. In esso viene accuratamente studiata la logistica greca, l'aritmetica pitagorica, quella dell'Accademia, e quella mistica. L'esame della teoria dei numeri dà luogo ad

Digitized by Google

un accurato ed importante esame dei lavori di Diofanto. Un ultimo capitolo infine tratta di alcune ricreazioni aritmetiche dei greci. Il volume è chiuso da un ampio indice alfabetico dei nomi.

Come pregio non piccolo del libro dobbiamo rammentare l'abbondantissima bibliografia che permette di ricorrere direttamente sia a studî più ampî, sia alle discussioni su dati soggetti particolari. Numerosi ancora sono nel testo i passi greci correttamente tradotti in italiano e che danno un esempio diretto dei monumenti letterari dell'epoca.

Se dall'esame generico del libro passiamo a quello dei fatti speciali ivi rammentati, è evidente che sarebbe impossibile non trovare dei concetti sui quali uno non può essere d'accordo con l'autore. L'abbondanza della materia, l'incertezza delle fonti sulle quali si basano molte nostre conoscenze, la diversa valutazione che si può dare ad un passo in rapporto alla veridicità dello scrittore antico al quale esso è attribuito, alla genuinità del testo, all'esattezza dell'interpretazione, sono tutte cause che possono far sorgere su questo o quel punto diversità di opinioni. Ma anche sotto questo rapporto credo che il Loria nella massima parte dei casi dubbî abbia veduto giusto. L'esposizione poi di tutte le vedute importanti rende sufficiente il libro anche quando lo storico deve necessariamente appigliarsi ad uno dei diversi partiti. Esaminare questi punti non è poi il compito di una recensione, ma di profondi ed accurati studî speciali.

Come conclusione non possiamo che augurare all'ottimo libro di Gino Loria una trionfale accoglienza, e, per quanto la lingua italiana debba essere necessariamente conosciuta da tutti coloro che vogliono competentemente occuparsi di scienza, ci auguriamo che traduzioni in altre lingue la rendano maggiormente accessibile ai lettori stranieri.

ALDO MIELI

* * *

Durante il decennio 1893-1912 Gino Loria, professore di geometria superiore nell'Università di Genova, pubblicava nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze, Lettere ed Arti di Modena i risultati dei suoi studi intorno alla letteratura matematica del popolo greco, studi dei quali aveva già prima dato

Digitized by Google

un saggio nelle Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino.

Oggi pei tipi della casa editrice Hoepli appare l'opera del Loria, " Le scienze esatte nell'antica Grecia „, che, lungi dall'essere una semplice ristampa, si presenta novella edizione, integrata nel contenuto dallo studio di documenti importantissimi venuti alla luce in questo ultimo volgere d'anni, e migliorata nella forma dal desiderio di dare al materiale raccolto un'esposizione corrispondente alle odierne cognizioni sopra la storia della matematica greca.

Come l'autore dichiara nella prefazione, che è una lucidissima sintesi degli intendimenti che lo hanno guidato nell'opera magistrale, il lavoro è un'esposizione per quanto possibile completa delle conquiste fatte dal popolo Elleno nel campo delle scienze esatte, volendosi comprendere sotto questa denominazione generica quelle discipline i cui risultati hanno ottenuto un posto nella matematiche pure. Si dovrebbe quindi ritenere che tutto ciò che concerne le applicazioni prossime e remote di queste discipline alla spiegazione dei fenomeni naturali e alla vita civile, sia stato lasciato in disparte, ma poichè la storia delle scienze esatte nell'antica grecia si confonde nei suoi primordi con la storia della filosofia e in alcune sue fasi con quella delle matematiche applicate, l'autore non ha potuto talora non fare una digressione nei campi che possono sembrare affatto estranei al matematico puro. E invero, troviamo che il volume comprende oltre a tre libri, che hanno per oggetto lo studio della geometria (dei quali il primo tratta del periodo di preparazione, il secondo del periodo di massimo splendore e l'ultimo del periodo di decadenza), un quarto libro dedicato all'astronomia, alla fisica matematica e alla geodesia. E la giustificazione di questa digressione nel campo astronomico, fisico-matematico e geodetico si trova subito, qualora si rilevi che il desiderio di scoprire le leggi della dinamica celeste condusse e implicò necessariamente ricerche matematiche, che di per sè non avrebbero avuto un fine. Così il voler descrivere esattamente i moti degli astri diede vita alla Sferica, alla quale si aggiunse più tardi come complemento la Trigonometria Sferica, che veniva a corredare di dati numerici la descrizione dei movimenti degli astri; così il voler discernere nei fenomeni celesti l'apparente dal reale condusse a studiare la Prospettiva e l'Ottica, derivandone in particolare la teoria della

Digitized by Google

rifrazione della luce ; come la Sferopea, appartenente per lo scopo all'astronomia, sorse per il fine di rappresentare con moti ben regolati ciò che era dato vedere, e la mente non intendeva pienamente, la geodesia per quello di determinare la struttura della terra. Ora tutte queste discipline hanno allargato immensamente il campo della matematica pura, perché su questa costruirono la loro base.

Noi ci indugeremo a esaminare l'opera del Loria nelle parte appnnto che riguarda la storia dell'astronomia, geodesia e fisica matematica. Questo argomento viene trattato nel Libro III porta il titolo: " Substrato matematico della filosofia naturale dei Greci ". Cinque capitoli ne raccolgono e disciplinano il materiale.

Il I capitolo, intestato: " Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronomiche anteriori ad Ipparco ", dopo un breve cenno sui caratteri generali dell'astronomia presso gli antichi Greci, si volge a studiare le varie ipotesi che si maturarono intorno alla forma della terra, e prendendo le mosse dalla più antica tradizione, consacrata dalla poesia omerica, che la terra fosse un disco galleggiante sul fiume Oceano, ci espone la teoria di Talete, il primo a cui spetta il merito di aver aperto la via ad una scienza astronomica, e che la terra considerava, secondo alcuni di forma sferica, secondo altri di forma discoide ; via via ci fa conoscere la concezione che ne ebbe Anassimandro, che il nostro pianeta voleva vedere simile a cilindro immobile nell'Universo ; Anassimene che lo considerava, come gli altri corpi celesti, disco sottilissimo sospeso e volteggiante per l'aria ; e infine Eraclito di Efeso, Senofane di Colofone, Anassagora, e il discepolo di questo Archelao Ateniese, e Antifonte di Atene ed Empedocle e Democrito, i quali, pur appartenendo a scuole filosofiche diverse, si avvicinarono tutti più o meno alle idee cosmologiche che Talete e i suoi discepoli avevano sostenuto, e che si concretavano nella fondamentale del non riconoscere la sfericità della terra. Con Pitagora troviamo insegnata per la prima volta tale verità, che peraltro non fu ammessa da tutti i contemporanei di lui. Ma Pitagora, oltre alla sfericità della terra, aveva ancor insegnato che questa aveva il suo centro fisso nel centro dell'Universo e intorno ad essa avvenivano le rivoluzioni della luna e degli altri pianeti in senso contrario a quella del sole ed intorno ad assi di rotazione obbliquamente disposti fra di loro ; come da questa concezione si sia giunti a quella del sistema eliocentrico ci è

Digitized by Google

detto dall'autore nel seguito del capitolo, dove troviamo esposta la prima modificazione portata al sistema Pitagorico da Filolao, vissuto sulla fine del V secolo a. C., e accennate le variazioni che alla lor volta subirono le idee di Filolao per opera specialmente di Iceta ed Ecfanto vissuti a Siracusa fra lo scorcio del V secolo e il principio del IV, e più ancora di Eraclide Pontico, discepolo di Platone, che abbandonando il canone Pitagorico della concentricità delle orbite planetarie, e facendo il sole centro delle rivoluzioni di Mercurio e Venere, coll'alludere all'ipotesi della rotazione della terra attorno al sole segnò un altro passo importante verso il sistema eliocentrico.

A chi poi precisamente spetti il merito di averlo concepito per primo è ignoto: sino dai tempi di Alessandro Magno si era avvertita la possibilità di dare una spiegazione attendibile dei fenomeni celesti per mezzo di movimenti intorno al sole, e a tale importante osservazione gli antichi collegavano due nomi: Aristarco di Samo, uno dei pochissimi astronomi ricordati da Tolomeo nell'Almagesto e contemporaneo di Archimede; e Seleuco di Babilonia, un pensatore di poco anteriore ad Ipparco. Dopo di questo, il sistema eliocentrico venne abbandonato per lasciar luogo a quello degli epicicli, ideato da Apollonio di Perga, come quello che sembrava più idoneo alla rappresentazione dei fenomeni celesti e pei calcoli astronomici.

Seguendo l'ordine del libro troviamo quindi un breve, ma efficacissimo studio sulle " Idee astronomiche di Platone „. Quali fossero queste idee, quale evoluzione seguissero ci è detto con chiarezza e dottrina: Platone non considerava l'astronomia soltanto come scienza di osservazione, ma ne ravvisava il duplice carattere matematico e fisico, secondo emerge da un passo che troviamo citato dell' " Epinomide „: egli fu un imitatore, e dapprima si attenne ai canoni posti dal grande filosofo di Samo, come si rileva dal " Timeo „ dalle " Leggi „ e dall' " Epinomide „, quindi verso il termine della propria vita venuto a conoscere le nuove idee formulate da Filolao sul movimento della terra le accolse per non più dipartirsene.

A dar luce e guida alla interpretazione dei concetti matematici esposti da Platone, veniva compilata nel secolo II° dell'E. v. un'esposizione metodica " Delle cognizioni matematiche utili per la lettura di Platone „ da Teone di Smirne, del quale dalle scarse notizie biografiche emerse è dato soltanto arguire fosse

Digitized by Google

di poco anteriore o contemporaneo di Tolomeo: di essa il Loria espone ampiamente lo scopo ed il piano.

Ma ben a più ardua impresa, che non all'opera testè accennata, la quale dal punto di visto scientifico ha assai scarsa importanza, avendo valore solo come un'illustrazione delle idee di Platone, fu di impulso la grande mente del filosofo ateniese; giacchè questi, proponendo il problema fondamentale: quali sono i movimenti uniformi che possono spiegare in modo soddisfacente i fenomeni offerti dalle rivoluzioni planetarie, condusse uno dei più forti pensatori della Grecia, Eudosso da Cnido, a concepire il sistema delle sfere omocentriche, che lo risolve completamente. E da quali presupposti Eudosso partisse, quale via percorse per giungere alla grande idea ci è detto chiaramente dall'autore che espone poi sotto il titolo " Le sfere di Calippo, e di Aristotile „ le modificazioni che l'astronomo Calippo e contemporaneamente Aristotile apportarono al suo sistema.

Tre diversi argomenti troviamo ancora trattati in questo capitolo primo.

Anzitutto ci è fatta la storia della cronologia greca: dalla computazione del tempo in mesi lunari si passa a quella dell'anno lunisolare, al quale sistema, per ovviare al disaccordo tra il presentarsi delle stagioni e l'epoca prefissata per le feste, si applica la correzione dell'anno bisestile, conosciuto già in età remotissima e regolato in modo stabile all'epoca di Solone (VI sec. a. C.), aggiungendo ai dodici mesi dell'anno comune, aventi alternativamente 30 e 29 giorni, un tredicesimo mese di 36 giorni. Ma anche questo sistema si mostra insufficiente e, secondo il noto scritto di Censorino " Die Natali „ vengono introdotte col periodo quadriennale nuove modificazioni; quindi si adotta verso il 432 a. C. il così detto ciclo di Metone e un secolo più tardi quello di Calippo di Cizica, finchè Ipparco porta un ulteriore e stabile perfezionamento.

All'esposizione dei cicli cronometrici segue lo studio dell'" Astronomia come scienza di misura „, e però viene esaminata l'opera di Aristarco da Samo « Sulle grandezze e le distanze del sole e della luna », le cui deduzioni sono basate su sei ipotesi fondamentali, che troviamo esposte dall'autore unitamente alla spiegazione matematica del procedimento tenuto da Aristarco per giungere alla quarta di esse, procedimento ancor oggi noto sotto il nome di " metodo della dicotomia di Aristarco „. Viene

Digitized by Google

inoltre riportato un brano dell' " Arenario „ di Archimede, in cui si accenna all'altra opera di Aristarco dal titolo " Ipotesi „, nella quale sarebbe stata sostenuta la teoria del sistema eliocentrico e in cui si espongono alcune ricerche di Archimede stesso sulla grandezza del contorno della terra, del diametro della terra in rapporto a quella della luna e simili. Con l'esposizione infine di un ingegnoso procedimento per calcolare il diametro del sole trovato dal filosofo storico Posidonio, vissuto negli ultimi tempi innanzi l'E. v., si chiude il capitolo primo.

Il II° capitolo è dedicato alla Sferica e si inizia con una ricerca sul primo trattato di Sferica presso i Greci. Fra le opere che compongono la " Piccola Collezione astronomica „, un insieme di scritti indispensabili, secondo Pappo, a coloro che essendo già istruiti negli " Elementi „ di Euclide vogliono dedicarsi allo studio dell'astronomia, si ha un trattato di Autolico Pitaneo intitolato " Della Sfera mobile „; in esso però al pari che nei " Fenomeni „ di Euclide, compresi parimenti in detta raccolta, si parla come se si avesse già a propria disposizione un trattato delle proprietà della sfera fissa. Ora poichè il primo trattato di sferica a noi pervenuto, avente per oggetto lo studio della sfera supposta fissa, è la " Sferica „ di Teodosio, bisogna argomentare che ne esistesse un altro anteriormente a questo. Di tale supposto lavoro chi sia l'autore è ignoto; si può per altro argomentare a preferenza per Eudosso da Cnido; di esso sembrano esistere tracce nel Papiro del Louvre, che porta il n. 1 ed è chiamato dal Letronne che lo decifrò " Didascalia celeste di Leptinio „ e che si presenta con tutto l'aspetto di un quaderno scolastico corrispondente ad un insegnamento orale fatto coll'aiuto di un manuale in versi e che ha uno stile assai simigliante a quello degli Elementi di Euclide. Di questa didascalia il Loria cita alcuni brani e ne espone brevemente il contenuto.

Quindi l'autore passa ad esaminare nel contenuto e nello stile le altre opere che compongono la Piccola Collezione astronomica: le due di Autolico da Pitane (del quale dà notizie biografiche) cioè la già nominata " Della sfera mobile „, e l'altra " Del levarsi e tramontare delle stelle „ (una terza " Sopra i pianeti „ non esiste più); i " Fenomeni „ di Euclide, di cui riferisce le proposizioni più significanti; " Delle ascensioni „ di Ipsicle, opera che pur essendo di scarso valore intrinseco, se si prescinde dal fatto che in essa per la prima volta appare la

Digitized by Google

divisione del cerchio in gradi e minuti primi, riesce importante dal punto di vista storico come quella che stabilisce un ponte fra l'Almagesto di Tolomeo e gli scritti congeneri anteriori; e finalmente le opere di Teodosio: la " Sferica „, " Delle abitazioni „, " Delle notti e dei giorni „, che non sono ancora pubblicate nel testo originale greco. Della Piccola collezione sembra facessero parte anche gli scritti: " Dati „, " Ottica „, " Catottrica „ di Euclide e " Grandezze e distanze del sole e della luna „ di Aristarco, dei quali l'autore parla diffusamente in altra parte del volume.

L'autore si indugia quindi a trattare del contributo portato da Menelao di Alessandria alla sferica, che con lui raggiunge il punto culminante. Di Menelao si sa che fece delle osservazioni astronomiche durante il primo anno del regno di Traiano, che compose un libro di astronomia per incarico di Domiziano, e scrisse il trattato sul " Calcolo delle corde di un circolo „, ed un'altra opera a cui confusamente allude Pappo (ambedue queste ultime non giunte sgraziatamente a noi) e che infine dettò la " Sferica „ di cui sono superstiti nella sostanza, se non nella forma, soltanto tre libri. Di questo lavoro l'autore espone la materia di cui consta, fermandosi a dire del contributo dato da Menelao anche agli elementi della geometria, e in particolare della scoperta attribuitagli da Pappo della cosidetta " curva straordinaria o mirabile „, sulla identità della quale cita le diverse congetture degli studiosi, e pur non negando possa identificarsi con la celebre curva di Viviani lascia insoluta la questione.

Passiamo al III° Capitolo, sul quale ci indugeremo più a lungo, come quello che racchiude la parte più importante e interessante dello studio del Loria sulla storia dell'astronomia greca.

Il Capitolo che porta l'intestazione " L'apogeo dell'astronomia greca „ si inizia con studio su Ipparco, il principe degli astronomi greci. Ipparco nato ad Utica, visse un po' a Rodi e un po' ad Alessandria intorno alla metà del II sec. a. C. Egli va insigne per la scoperta della precessione degli equinozi (scoperta fatta nel 134 a. C.), per la costruzione del catalogo stellare di 1022 stelle fisse, per l'uso della longitudine e della latitudine come coordinate geografiche, per l'applicazione delle eclissi lunari alla ricerca delle longitudini, oltre che per uno scritto

Digitized by Google

sopra le equazioni quadratiche, di cui gli Arabi serbarono memoria e, secondo Strabone, per una specie di triangolazione della porzione di terra allora conosciuta, per la scoperta di due relazioni approssimate fra la lunghezza dei lati dei poligoni regolari di 9 ed 11 lati e il raggio del cerchio a loro circoscritto, scoperta che da Erone Alessandrino è fatta risalire a lui. I lavori di Ipparco andarono perduti e di tutti esiste tuttora soltanto l'" Ipparchi in Arati et Eudoxis Phaenomena Commentariorum „ opera che doveva essere quella dotata di minor originalità e minor valore; tuttavia tracce de' suoi lavori troviamo nell'Almagesto di Tolomeo.

Di questo altro grande astronomo greco viene a parlare il Loria dopo le citate notizie su Ipparco. Di lui pochi sono i dati sicuri che si hanno e questi pochi si deducono dalla sua stessa opera principale. Emerge da questa che egli visse nel secolo II dell'E. v. e fu posteriore a Proclo. Della sua grande opera l'autore, premesso un cenno circa le trasformazioni che ne subì il titolo dalla forma originaria di " Collezione Matematica „ a quella di " Almagesto „, sotto cui è nota in Europa, e circa le diverse edizioni che hanno visto la luce dal 1538, quando al rinvenimento del testo originale si pubblicò la prima, viene ad esporre sinteticamente la materia dei diversi libri che la compongono; ne mette in rilievo il relativo grado di originalità ed il punto di rassomiglianza, per l'assenza di esatte citazioni, con gli Elementi di Euclide, indugiandosl a parlare diffusamente della trigonometria piana e sferica che per la prima volta in questo lavoro fu esposta ed applicata.

Premesso che la differenza fra la trigonometria tolemaica e quella di cui ci serviamo è meno grande di quanto comunemente si asserisce, fa una breve digressione sulla genesi della trigonometria greca, basandosi su varii elementi ipotetici, sui quali l'autore chiama esplicitamente l'attenzione, augurandosi che ulteriori sicerche abbiano a mostrarli fondati sulla realtà; quindi passa ad esporre il metodo tenuto da Tolomeo nella costruzione di una tavola di corde, dandone di alcune il calcolo, e fermandosi sul così detto " Teorema di Tolomeo „ e conseguente sua applicazione. Finalmente cita le altre opere di Tolomeo, cioè: il " Planisfero „, posteriore all'Almagesto e importante in quanto contiene l'enunciazione del metodo della proiezione stereografica (quest'opera per altro è dubbio se possa assolutamente attribuirsi

Digitized by Google

a Tolomeo o ad altri); l'" Analemma„, compilata allo scopo di insegnare la proiezione ortogonale di una sfera su di un piano; la " Geografia „, notevole in quanto, oltre a contenere allusioni alla proiezione stereografica, dà per la rappresentazione della terra un procedimento, a cui più tardi troviamo essersi inspirato N. Mercatore nel concepire il metodo della proiezione che porta il suo nome. Ma di un altro ramo dell'attività di Tolomeo s'intrattiene ancora l'autore, cioè dell'opera che doveva essere una specie di commentario di Euclide, e di cui non restano tracce se non per la memoria che ne serbano Erone e Proclo.

Dell'Almagesto venne fatto un Commentario da Teone di Alessandria, vissuto nella seconda metà del IV sec. dell'E. v., e noto anche per esser stato il padre di Ipazia, donna celebre nella storia greca per la profonda sua dottrina nelle scienze filosofiche e mediche, e per la morte ignominiosa, a cui la condannò la Chiesa Cristiana, che volle vedere in lei, anima fieramente pagana, e nei suoi aderenti un terribile pericolo all'affermarsi della religione di Cristo. Il Commentario di Teone è giunto a noi soltanto in tre libri e invano si cercherebbero in esso gli elementi sufficienti per ricostruire la storia della Sferica e della Trigonometria greca: le notizie più abbondanti e veramente utili che ci somministra concernono l'aritmetica pratica (logistica) dei Greci.

Accenneremo ora brevemente al IV capitolo che tratta " Degli albori della Fisica matematica „. Premesse alcune considerazioni generali circa l'ottica presso i Greci, l'autore s'intrattiene su due opere riguardanti la teoria della luce: l'" Optica „ e l'" Opticorum recensio Theonis „, di contenuto circa eguale e che verisimilmente possono e debbono attribuirsi ad Euclide; quindi richiama l'attenzione su un opuscolo, che fu celebre sotto il nome di " Catottrica di Euclide „, ed è importante, perchè fa prova del primo studio razionale circa i fenomeni provenienti dalla riflessione della luce sopra specchi piani o sferici; e inoltre su un piccolo scritto " Fondamenti di Ottica „ che pur non essendo che l'esposizione di alcune proposizioni dell'" Ottica „ di Euclide, e nel tempo stesso la confutazione di alcune altre contenute in questo libro stesso, è interessante perchè serba notizia di un'importante osservazione, quella che la luce percorre durante la riflessione il cammino più breve possibile. Di questo lavoro il Loria rileva ancora l'incertezza che tuttora esiste se debba essere

Digitized by Google

considerato come opera di Eliodoro da Larissa o di Damiano, discepolo di Eliodoro. Da ultimo vien citato un altro lavoretto sugli specchi attribuito a Tolomeo, ma probabilmente dovuto ad Erone. Importantissima invece è un' altra opera di Tolomeo, l' " Ottica ", come quella che tratta " ex professo " della luce, argomento che mai occorre nei lavori testè citati. Questo scritto non ci è pervenuto nella sua integrità, mancandoci il primo libro e la fine del quinto ; di esso il Loria fa una brevissima critica concludendo che, se nell' " Ottica " Tolomeo non brilla come matematico, fa per compenso eccellente figura come fisico, giacchè le esperienze che egli descrive per verificare la legge della riflessione e scoprire quella che governa la rifrazione (nel passaggio dall' aria nell' acqua o nel vetro, oppure dall' acqua nel vetro) lasciano poco a desiderare.

Il capitolo contiene ancora pagine sull' Idrostatica in Archimede e sulla sua opera " I Galleggianti ", e sulla " Statica " di Erone di Alessandria ; ma su queste non ci indugiamo, chè si varcherebbero i limiti imposti da questa Rivista.

Rileveremo dal capitolo che segue (Capitolo V), ove viene trattato il problema della così detta " questione eroniana " la notizia di un lavoro che, se è da considerarsi come documento prezioso della geometria greca, ha per noi importanza in quanto ci dà qualche notizia sull' antica geodesia : intendiamo parlare dello scritto intitolalo " *περὶ διόπτρας* " tradotto in italiano col titolo di " Traguardo ". Fa parte delle opere che portano il nome di Erone, e il titolo ha origine in uno strumento geodetico che aveva per gli antichi lo stesso officio che ha per i moderni il teodolite. Il lavoro ha interesse in quanto fa risaltare che, oltre allo strumento testè nominato, i Greci conoscevano altri apparati, e che non fu Erone il primo greco che si sia occupato di geodesia ; tuttavia non ci illumina sulla storia della geodesia preeroniana.

Altre notizie sulla geodesia presso i Greci ci sono date nel capitolo VI, che verte appunto intorno ai geodeti minori dell' antica Grecia. E c' imbattiamo dapprima in un geodeta bizantino, il cui nome non è conosciuto con certezza, che vien da taluno chiamato Erone il giovane per distinguerlo dai due Eroni d' Alessandria ; egli ha un trattato di geometria pratica, che sembra essere stato redatto verso il 938 dell' E. v. in Costantinopoli, e che oltre ad avere col " Traguardo " di Erone comune lo scopo si presenta come pedissequa imitazione di questo e ha scarsissimo

Digitized by Google

valore dal punto di vista matematico. Quindi troviamo ricordato Sesto Giulio Africano (che, come l'autore nota, per ordine cronologico avrebbe dovuto precedere nel suo lavoro il geodeta bizantino Erone) vissuto sotto il regno di Alessandro Severo. Egli scrisse una monografia intitolata *Κεστοί*, parola che significherebbe se tradotta letteralmente " cose riunite coll'ago „, cioè cose varie; in essa troviamo un passo concernente la geometria pratica, in quanto viene proposto il problema di determinare la larghezza di un fiume o l'altezza di un muro, problema che si presenta risolto in due modi. E poi esaminato il papiro che dal nome di colui che lo scoprì nel 1895 in un negozio del Cairo porta la denominazione di papiro Ayer: sembra per la scrittura adoperata non posteriore al principio dell'E. v., e lo stile in cui è redatto autorizza a considerarlo come una copia (abbastanza mal fatta) di un trattato di geometria pratica molto più antico, forse anche anteriore ad Erone. Doveva far parte di un' opera che per la forma ricorda l'antico " Manuale del calcolatore egiziano „ emerso dal papiro Rhind e scritto da Ahmes 1700 o 2000 anni a. C., il quale dà molte notizie intorno al metodo con cui si calcolava nell'antico Egitto, e per la sostanza sembra riconnettersi con i lavori di Erone e lo scritto di Euclide che tratta " Della divisione delle figure „.

Il breve riassunto che porgiamo dello scritto del Loria può forse già di per sè mostrare come interessante e pregevole sia questa storia dell'astronomia greca: aggiungeremo che essa è formulata con chiarezza e ordine mirabile, sì da raggiungere pienamente lo scopo che l'autore si era prefissato col volerla accessibile anche alle menti corredate soltanto di una modesta cultura scientifica. Le fonti da cui venne derivata la materia delle singole ricerche sono citate con grande precisione ed abbondanza, in modo che ad ognuno è mostrata e facilitata la via per personali ricerche su tutte quelle questioni che l'Autore ha lasciato insolute, pel senso altamente apprezzabile di non formulare giudizi assoluti quando i dati non sono sufficienti ad autorizzarli.

Nè v'ha bisogno di rilevare che, se l'opera è valido documento della profonda erudizione e del vigoroso ingegno del Loria, riesce pur anche di alto onore per il paese al quale lo scrittore appartiene, la nostra Italia.

Luigi Carnera.

Digitized by Google

F. KLEIN *und* M. BRENDEL, *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.* Heft II. L. SCHLESINGER, *Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren* 1797-1799. Heft III. L. SCHLESINGER, *Ueber Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie.* 1912.

La collezione di cui si fanno parte questi opuscoli (estratti dalle *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*) è già nota ai nostri lettori (*Bollettino*, T. XIV, 1912, p. 62): si tratta di uno studio dei manoscritti inediti di Gauss, fatto col duplice scopo di trarne le gemme tuttora ivi sepolte e di lumeggiare la vita intellettuale del grande matematico tedesco. Ora i due nuovi elementi testè pubblicati di quella collezione concernono gli scritti inediti relativi alla teoria delle funzioni collegate alle ellittiche ed alla teoria generale delle funzioni; l'interesse che offrono è veramente straordinario, chè il prof. L. Schlesinger ha dato prova di una pazienza da benedettino nel raccogliere i materiali e di profondità ed acutezza mirabili nel commentare le pagine del " princeps mathematicorum „; per ciò essi presteranno un inapprezzabile ajuto, non solo a chi vorrà scrivere una completa biografia di Gauss, ma eziandio a coloro che in avvenire vorranno narrare la storia dell'analisi nel periodo che va da Lagrange a Weierstrass.

Il contenuto della prima delle pubblicazioni in discorso risulta con sufficiente chiarezza dal titolo che porta; ma quello della seconda è così variopinto che per farlo conoscere è necessario riprodurne qui, almeno in succinto, l'indice:

1. Introduzione e sguardo generale sui materiali sfruttati. 2. Tradizioni sopra il primo periodo di giovinezza 1791-1795. 3. Il periodo storico 1796-16 luglio 1799. 4. Gli anni 1799-1800: funzioni ellittiche generali. 5. Memoria postuma sopra la media aritmetico-geometrica; funzioni modulari. 6. Gli anni 1801-1810. 7. L'anno 1811; la serie ipergeometrica; teoria delle funzioni. 8. Gli anni 1813-1827. 9. Gli anni 1827-1843.

Chiuderemo questo annuncio avvertendo che la lettura dei due opuscoli in questione offre al lettore sorprese altrettanto gradite di quelle che procurò lo studio dei volumi VII-IX delle *Opere* di Gauss.

G. L.

Digitized by Google

A. MAIRE. *L'oeuvre scientifique de Blaise Pascal. Bibliographie critique et analyse de tous les travaux qui s'y rapportent*, Préface par PIERRE DUHEM. 8° p. 184. Paris, Hermann, 1912. (Prezzo fr. 15.00).

Libri aventi lo scopo di questo volume del MAIRE dovrebbero veramente esservene in numero maggiore. Ma ai giorni nostri purtroppo la storia della scienza non occupa, nell'opinione dei dotti, quel posto al quale pure avrebbe diritto; e ben pochi sono coloro che si dedicano a questi studi, che pure presentano sì grande fascino.

Quando la storia della scienza la si intenda nel senso in cui oggi la intendono i ben noti cultori di questa disciplina, non può, credo, negarsi ad essa quel senso di alta originalità che le deve dare oggi il diritto d'esser considerata alla pari di qualsiasi altro ramo della scienza. Ed è per questo non grande apprezzamento che oggi si fa degli studi di storia scientifica, che, almeno per la storia delle matematiche, pochi ne sono i cultori: e quei pochi non possono dedicarvisi completamente; ma debbon riserbare solo per questi studi, i momenti di ozio e di riposo.

Il titolo del libro, del quale vogliamo dar qualche cenno, annuncia, in verità, molto più di quello che contiene. Il titolo annuncia infatti la *bibliografia, critica ed analisi di tutti i lavori che si riferiscono a* BIAGIO PASCAL. Ci vorrebbe altro che un volume di 184 pagine, quale è quello del MAIRE!

Il volume quindi appare subito incompleto anche a chi lo sfogli appena; certamente, in lavori di simil natura, non è possibile richiedere la perfezione; ed è quindi inopportuno, mi sembra, annunciare più di quello che poi effettivamente si dà.

Dopo una bella prefazione dell'illustre PIERRE DUHEM, storico e scienziato veramente geniale, segue una introduzione nella quale si espone, a brevi tratti, la vita e l'opera scientifica del sommo PASCAL.

Si comincia poi colle indicazioni bibliografiche esatte dei lavori giovanili di PASCAL, a cominciare dal famoso *Essay pour les coniques* del 1640, e, a proposito del teorema sull'*exagramma mysticum*, in esso contenuto, si dà una lista di lavori riguardanti il detto teorema, e quello correlativo che BRIANCHON ritrovò ben quasi due secoli dopo.

Digitized by Google

A questo proposito, e per provare quello che sopra abbiamo asserito, che cioè l'opera, peraltro utile e pregevole, del MAIRE, è troppo incompleta, ci sia permessa qualche osservazione. Con quale criterio, domandiamo noi all'Autore, son state indicate quelle settantanove opere che trattano più o meno di proposito del teorema di PASCAL?

Crede forse l'egregio Autore che il teorema sull'esagono non abbia provocata che una sì relativamente scarsa messe di ricerche e di lavori? Faremmo certo un grave torto al MAIRE a supporre questo, ed allora è ben lecita la domanda che gli vorremmo rivolgere; di illuminarci cioè un poco per farci conoscere con quale criterio egli ha citate le *Leçons de Géométrie élémentaire* di HADAMARD, le *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva* di CASTELNUOVO, per non far cenno che dei trattati. Non si creda che noi avremmo preteso che egli citasse tutti i Trattati di Geometria Analitica e Proiettiva in cui si parla del teorema sull'esagono; sarebbe stato questo un lavoro perfettamente inutile, un lavoro equivalente a quello di far la lista di tutti i trattati geometrici che han vista la luce dal '700 ai giorni nostri. Ma un criterio di cernita avrebbe fornito al libro (almeno per la parte riguardante i lavori matematici) una maggiore utilità.

Seguono le descrizioni dei lavori sulla macchina aritmetica, da PASCAL ideata a venti anni, sul triangolo aritmetico, sulla cicloide, etc.; e quindi seguono elenchi di opere nelle quali si fa cenno delle ricerche di PASCAL.

Si passa poi a dar la lista delle varie edizioni delle famose opere di argomento fisico del PASCAL, e si dà inoltre un elenco di lavori pubblicati in seguito a queste ricerche.

Seguono ancora le descrizioni accurate, con i rispettivi indici, delle varie edizioni delle opere complete del sommo matematico: la prima edizione di queste opere fu pubblicata nel 1729 dall'abate BOSSUT in cinque volumi; una ristampa fu eseguita nel 1819 pure in cinque volumi, dei quali i due soli ultimi raccolgono le opere scientifiche. Vi fu inoltre nel 1858 una edizione curata da LAHURE in due volumi; ed infine si ebbe nel 1900 la prima serie (in tre volumi) delle *Opere* pubblicata da Léon BRUNSCHVICG e Pierre BOUTROUX.

Molto opportunamente si fa seguire anche l'elenco delle pubblicazioni del padre di PASCAL, ETIENNE PASCAL.

L'A. aggiunge poi un elenco dei principali lavori stesi a proposito della biografia di PASCAL dal punto di vista scientifico.

Digitized by Google

Nell'ultima parte del lavoro del MAIRE sono raccolti i titoli dei lavori pubblicati a proposito della famosa mistificazione della quale fu vittima verso la metà del secolo scorso il grande CHASLES.

Si tratta, come si sa, di una quantità di lettere falsificate di BIAGIO PASCAL e del padre STEFANO che un mistificatore, sorprendendo la buona fede dello CHASLES, vendette a questi. Tra queste ve ne erano di dirette a GALILEI, TORRICELLI, VIVIANI, NEWTON, FERMAT, ecc., e lo CHASLES ne fece oggetto di moltissime comunicazioni all'Accademia delle scienze di Parigi: chi per primo sospettò la falsità delle lettere fu FAUGÈRE, che pubblicò in proposito un volume. Il MAIRE raccoglie opportunamente i titoli di tutte le pubblicazioni cui diè luogo questo incredibile inganno di cui fu vittima un uomo integro ed illustre quale lo CHASLES.

Naturalmente al volume del MAIRE sono poi aggiunti accurati indici.

Per quanto incompleta, almeno in alcuni punti, l'opera del MAIRE riescirà senza dubbio molto utile agli studiosi: e sarebbe veramente desiderabile che si venissero compilando sulle opere scientifiche dei maggiori matematici pubblicazioni del genere di questa.

Ad ogni lavoro citato riguardante PASCAL o le sue opere, l'A. fa seguire pochi cenni di schiarimento circa l'argomento della pubblicazione; però per i lavori d'indole matematica non sempre questa ottima regola è seguìta.

Noi auguriamo che l'A., in qualche prossima edizione della sua opera, ne amplifichi di molto le proporzioni, in modo da poterci dare una bibliografia scientifica di BIAGIO PASCAL, che possa aspirare a chiamarsi bibliografia, critica ed analisi di tutti i lavori che si riferiscono al sommo matematico e filosofo francese.

ALBERTO PASCAL.

Probabilità.

A. MARKOFF. *Démonstration du second Theorème-limite du calcul des probabilités par la méthode des moments. Avec un portrait de Jacques Bernoulli.* Pag. IV + 66 (St. Pétersbourg, 1913).

In questo *Bollettino* (T. XV, 1913, p. 17-21) abbiamo dato notizia della traduzione tedesca del " Trattato sulle probabilità „ del sig. Markoff. Un codicillo di questa opera notevole figura nella

Digitized by Google

3ª edizione russa del trattato stesso ed è stato da poco pubblicato, in lingua francese, in occasione del secondo centenario della scoperta della *legge dei grandi numeri*, o, per essere più precisi, della pubblicazione della *Ars coniectandi*, nella quale Giacomo Bernoulli enunciava e dimostrava il teorema celebre che porta il suo nome. Del qual teorema la legge dei grandi numeri non è che una generalizzazione.

" Se si fanno n prove successive, e in esse un avvenimento A ha successivamente le probabilità rispettive $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la probabilità che il rapporto fra il numero di volte che l'avvenimento A si verificherà, e il numero n differisca da $\frac{1}{n}(p_1 + p_2 \ldots + p_n)$ di una quantità piccola a piacere, può essere resa vicina all'*unità*, ossia alla certezza, quanto si vuole, col prendere abbastanza grande il numero n „. Questa può dirsi la legge dei grandi numeri di Poisson. Ed è questo enunciato che il sig. Markoff chiama il *1° teorema-limite* delle probabilità. Egli ne ha dato una semplice dimostrazione (fondate sulle disuguaglianze di Cebycef) nel Cap. III del menzionato *trattato*. Alla dimostrazione del *2° teorema-limite* è dedicato, in massima parte, l'opuscolo del quale discorriamo ora; esso si riferisce alla *espressione limite* della probabilità dei risultati in un numero infinito di prove ripetute e può enunciarsi, nel modo più generale, così:

" Siano $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ quantità variabili, capaci, ciascuna, di assumere casualmente differenti valori; sia a_i la speranza matematica di Z_i (somma dei prodotti dei differenti valori che Z_i può assumere, per le rispettive probabilità), sia b_i la speranza matematica di $(Z_i - a_i)^2$. Allora la probabilità della disuguaglianza

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - , \ldots - a_n}{\sqrt{2(b_1 + b_2 \ldots + b_n)}} < t_2$$

converge verso il limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} dx$ quando n cresce indefinitamente „. Per la validità del teorema si suppongono verificate talune condizioni riguardo alle speranze matematiche delle potenze intere dei valori assoluti delle differenze $Z_i - a_i$.

La dimostrazione poggia in parte sulla valutazione della espressione-limite della speranza matematica della potenza

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)^m$$

per m intero; in parte sopra il seguente teorema fondamentale d' analisi:

Digitized by Google

" Se l' insieme dei valori possibili di una quantità reale n e della loro probabilità varia in guisa che, per ogni numero intero positivo m, la speranza matematica di x^m converga verso il limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^m \, e^{-x^2} \, dx ,$$

allora le probabilità delle disuguaglianze

$$t_1 < x < t_2 \quad , \quad t_1 \leq x < t_2 \quad , \quad t_1 < x \leq t_2 \quad , \quad t_1 \leq x \leq t_2$$

convergono verso il limite comune $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} \, dx$ ".

L'insieme dei calcoli che conducono alla dimostrazione è estremamente laborioso.

In una seconda parte dell'opuscolo, l'A. si occupa della espressione-limite della probabilità dei risultati in un caso in cui le singole prove siano fra loro dipendenti, in guisa che sia p_1 o p_2 la probabilità dell'avvenimento A nella prova k^{ma}, a seconda che nella $(k-1)^{ma}$ l' avvenimento stesso si è, o non si è presentato.

P. Pizzetti.

Meccanica razionale.

F. Caldarera. *Corso di meccanica razionale.* Palermo, Stabilimento tipografico Virzi, 1915. — Vol. primo: Preliminari - Cinematica - Studio delle forze. = Seconda edizione migliorata (Prezzo L. 13).

Nel 1906 fu pubblicato il terzo volume della prima edizione del " Corso di meccanica razionale " di Francesco Caldarera. Ci affrettammo a recensirlo in questo " Bollettino "; come ci affrettiamo ora a render conto del primo volume, testè apparso in seconda edizione. Senza alterarne il piano generale, il Caldarera vi ha introdotto modificazioni ed aggiunte. La principale tra queste è rappresentata dai " Preliminari ", sezione introduttiva, divisa in tredici paragrafi, dove sono riassunte molte nozioni di geometria analitica e di calcolo in forma appropriata per i richiami dei capitoli successivi, cui viene così conferita maggiore spigliatezza. L'Autore ha saputo inserire nei preliminari utili accenni di coltura generale a proposito dei diversi sistemi di coordinate astronomiche.

Digitized by Google

Nella Parte Seconda " Studio delle forze ", troviamo ora alcune generalità sulle funzioni potenziali, che nella prima edizione erano rimandate all'ultimo capitolo. Non si può certo non approvare una tale trasposizione, che risponde ad una consuetudine, ormai stabilita, delle trattazioni moderne. In una locuzione però il Caldarera si scosta dalla consuetudine, chiamando " posizionali " le forze che derivano da un potenziale, e non, più generalmente, tutte quelle che dipendono dalla sola posizione dei punti di applicazione, come si fa per lo più.

Alla nuova edizione non può mancare l'accoglienza favorevole che già incontrò la prima, e di cui è tangibile riprova il rapido esaurimento.

Vada intanto al venerando e sempre vegeto Autore il gratulante omaggio degli studiosi.

T. LEVI-CIVITA.

***

S. WIESNER. *Grundlinien der Kinematik.* 8.° p. 13. Wien, Berlin und London, Verlag für Fachliteratur, 1913. (Prezzo Mk. 1).

Nella presente memoria l'A. espone un metodo per fondare assiomaticamente la meccanica. In particolare il principio di Hamilton appare ivi come un'estensione del teorema geometrico che fra due punti si può condurre una sola geodetica, cioè la retta. La trajettoria di un sistema di masse è la " retta " dello spazio a quattro dimensioni. Le masse dei punti si presentano come funzioni della loro posizione in tale spazio. Col mezzo dell'assioma V, secondo cui la curvatura di tale spazio è nulla, si ottengono, all'infuori del mondo dell'esperienza, due spazi metafisici. Il lavoro si chiude con alcune considerazioni di filosofia naturale.

L'autore esprime la speranza che il suo lavoro serva di filo conduttore nella selva di problemi che ha fatto pullulare il principio di relatività. G. L.

Teoria degli Insiemi

A. SCHOENFLIES, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Umarbeitung des im VIII Bande der Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichts gemeinam mit* HANS HAHN *herausgegeben von* A. S. *Erste*

Digitized by Google

Hälfte. Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen von A. S. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913. 8° p. XI + 389.

Nel 1900 A. Schoenflies pubblicava, per incarico della Società matematica tedesca, la prima parte di un Rapporto sulla teoria degli aggregati, comprendente la teoria generale degli aggregati, quella degli aggregati di punti, e l'applicazione alle funzioni di variabili reali.

Molto più tardi, nel 1908, compariva la seconda parte, dedicata alle applicazioni geometriche.

Il grande sviluppo che ebbe la teoria degli aggregati in questi ultimi anni, ed al quale ha dato senza dubbio vigoroso impulso l'opera di Schoenflies, ha fatto sentire vivo il desiderio di vedere la prima parte di essa portata al punto attuale. A tale desiderio risponde il presente volume, il quale però, più che un rifacimento, come viene modestamente qualificato, è un'opera quasi totalmente nuova; la mole è più che triplicata; la forma è meno concisa e schematica; l'antico libro di consultazione è divenuto quasi un trattato, un'opera di studio.

Il volume comprende soltanto la teoria generale degli aggregati e quella degli aggregati di punti; per l'applicazione alle funzioni di variabili reali, che formerà oggetto di un secondo volume, l'autore è ricorso alla collaborazione di H. Hahn, la cui speciale competenza assicura che anche questa parte verrà trattata in modo degno dell'importante soggetto.

Il punto di partenza della teoria generale degli aggregati, alla quale è dedicata la *Sezione prima*, è il concetto di *potenza* o *numero cardinale* (C. 1). Due aggregati hanno egual potenza od egual numero cardinale, o sono *equivalenti*, se tra i loro elementi si può stabilire una corrispondenza biunivoca e completa. Un insieme equivalente ad una propria parte si dice *infinito*. Ai numeri cardinali si applicano in modo noto le operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza, le quali conservano le loro proprietà formali. Si definiscono pure i concetti di *riunione (Vereinigung)* e di *intersezione (Durchschnitt)* di due aggregati M, N; la riunione $\mathbf{S}(M, N)$ è l'insieme degli elementi appartenenti ad uno almeno degli aggregati, l'intersezione $\mathbf{D}(M, N)$ è l'insieme degli elementi appartenenti ad ambidue gli aggre-

Digitized by Google

gati. Questi concetti possono estendersi ad un numero qualunque, anche infinito, di aggregati; qui però si affaccia il postulato di Zermelo, che incontreremo più innanzi.

Ogni aggregato equivalente all'insieme dei numeri interi positivi si dice *numerabile* (C. 2). La classe degli aggregati numerabili ha proprietà interessanti; ad essa appartiene l'insieme dei numeri razionali, quello dei numeri algebrici, e qualunque insieme di campi separati di uno spazio ad un numero qualsiasi di dimensioni. Se $M, M_1, M_2, \ldots$ è un insieme numerabile di aggregati infiniti, di cui ciascuno contiene il seguente, possono esistere elementi comuni a tutti gli aggregati; l'insieme di questi elementi può denotarsi con $\mathbf{D}(M_\nu)$ o con M_ω. Il ragionamento tendente a dimostrare che, se una proprietà appartiene a tutti gli M_ν, essa appartiene anche ad M_ω, suol designarsi col nome di *induzione trasfinita*, per analogia coll'ordinaria induzione o passaggio da ν a $\nu + 1$. Evidentemente i due tipi d'induzione corrispondono ai due *principii di formazione* dei numeri trasfiniti di Cantor di cui parleremo più oltre.

Fra due numeri cardinali $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ può esistere una delle tre relazioni:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \ , \ \mathfrak{m} > \mathfrak{n} \ , \ \mathfrak{m} < \mathfrak{n} \ ,$$

oppure essi possono essere non paragonabili (C. 3); ha luogo la relazione $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, quando gli aggregati M, N, di cui $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ rappresentano le potenze, non sono equivalenti, ma esiste una parte di M equivalente ad N. La proposizione fondamentale in questo campo è il *teorema d'equivalenza*, il quale stabilisce che gli aggregati infiniti M, N sono tra loro equivalenti sempre e soltanto quando M contiene una parte equivalente ad N ed N una parte equivalente ad M. Per la grande importanza di questo teorema l'Autore riferisce le varie dimostrazioni che di esso furon date.

Per lungo tempo si discusse se esistano effettivamente numeri cardinali trasfiniti non paragonabili. La questione è stata risolta in senso negativo dal teorema di Zermelo; tuttavia non cessa di essere interessante vedere quali conseguenze possano trarsi dal solo teorema d'equivalenza. Eccone alcune.

Se tutti i numeri cardinali sono paragonabili tra loro, si ha, qualunque sia $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{m} \ ,$$

Digitized by Google

dove $\mathfrak{a}$ è il numero cardinale degli aggregati numerabili. — Se $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ e $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}$, ne segue:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{p} \geq \mathfrak{n} + \mathfrak{q} \quad , \quad \mathfrak{mp} \geq \mathfrak{nq} \; .$$

Tra gli aggregati non numerabili (C. 4) è importante particolarmente quello costituito da tutti i numeri reali compresi tra due numeri qualunque. La sua potenza, o, come si dice più brevemente, la *potenza del continuo*, che si suole denotare con $\mathfrak{c}$, è indipendente dall'ampiezza dell'intervallo; la proposizione fondamentale:

$$\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$$

fu stabilita da Cantor sino dal 1873. Hanno la potenza $\mathfrak{c}$: l'insieme di tutti i numeri irrazionali; l'insieme di tutti i numeri trascendenti; l'insieme di tutti i punti di uno spazio le cui dimensioni formano un insieme finito o numerabile; l'insieme di tutte le funzioni continue d'una variabile; l'insieme di tutte le funzioni analitiche d'una variabile. Con queste proposizioni si connettono strettamente le relazioni seguenti, in cui ν rappresenta un numero finito qualunque maggiore di 1:

$$\nu\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \quad , \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \quad , \quad \mathfrak{c}^{\nu} = \mathfrak{c} \quad , \quad \nu^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} \; ;$$

le analoghe per il numero $\mathfrak{a}$ sono:

$$\nu\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \quad , \quad \mathfrak{a}^{\nu} = \mathfrak{a} \; .$$

È superiore a $\mathfrak{c}$ la potenza $\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ dell'insieme di tutte le funzioni d'una variabile; essa è anche la potenza dell'insieme di tutti gli aggregati parziali contenuti nel continuo.

Più generalmente, qualunque sia l'insieme M, si ha per la sua potenza $\mathfrak{m}$:

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m} \; ;$$

$2^{\mathfrak{m}}$ è la potenza dell'insieme di tutti gli aggregati parziali contenuti in M. Questo risultato è interessante, perchè mostra che, dato un numero cardinale qualsiasi, si può sempre costruirne uno maggiore.

Entra ora in campo il concetto di ordine (C. 5). Un insieme si dice *ordinato* se, dati due elementi a, b qualunque di esso, è stabilito se a precede o segue b (ciò che si denota con:

$$a < b \quad , \quad a > b \,) \, ,$$

Digitized by Google

colle condizioni che:

se $a \lesssim b$, $b \gtrsim a$;

se $a \lesssim b$ e $b \lesssim c$, $a \lesssim c$.

Se due aggregati equivalenti sono ordinati, e tra essi può stabilirsi una corrispondenza biunivoca ed ordinata (cioè tale che gli elementi corrispondenti si trovino nello stesso ordine nei due aggregati), si dice che i due aggregati sono *simili,* od hanno egual *tipo ordinale.* Il tipo ordinale dell' insieme ordinato $1, 2, 3, \ldots$ si suol denotare con ω. Pei tipi ordinali possono definirsi le operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza; le due prime hanno la proprietà associativa ma non quella commutativa. Il caso del prodotto di infiniti fattori esige considerazioni speciali.

È degno di nota, che a qualunque insieme ordinato può estendersi il concetto di limite, il quale potrebbe credersi un carattere esclusivo del continuo. Se si ha una *serie fondamentale crescente* d' elementi d' un insieme ordinato M, cioè un insieme numerabile d' elementi $a_1, a_2, \ldots$, tali che:

$$a_1 < a_2 < \ldots ,$$

e se esiste un elemento a_ω tale, che per qualunque ν si abbia $a_\nu < a_\omega$, e per qualunque elemento $b < a_\omega$ esista un numero λ per cui $a_\lambda > b$, a_ω dicesi *elemento limite* della serie. Questa definizione permette di applicare agli aggregati ordinati, o, ciò che è lo stesso, ai tipi ordinali, alcuni caratteri ben noti degli aggregati di punti. Così un insieme ordinato si dice *chiuso,* se ad esso appartengono gli elementi limiti di tutte le serie fondamentali che contiene; *concentrato,* (*, se tutti i suoi elementi sono elementi limiti; *perfetto,* se è chiuso e concentrato. Si designa inoltre col nome di *intervallo* l' insieme degli elementi compresi tra due elementi dati; e si dice che un insieme ordinato è *denso,* se in ogni suo intervallo cadono elementi di esso.

Due tipi ordinali specialmente importanti sono quello η dei numeri razionali e quello θ dei numeri reali, disposti gli uni e gli altri in serie crescente. Il tipo η è caratterizzato dall' essere nume-

(*) Nella *Teoria delle funzioni analitiche* (Milano, Hoepli, 1901) abbiamo adottato questo termine come traduzione del tedesco *in sich dicht.*

Digitized by Google

rabile, denso e senza primo nè ultimo elemento; il tipo θ dall'essere perfetto, e dal contenere un insieme parziale numerabile avente elementi in qualunque intervallo di θ.

Un insieme può concepirsi ordinato simultaneamente secondo più criteri diversi; corrispondentemente si hanno i *tipi ordinali a più dimensioni.* L'autore accenna ai pochi risultati raggiunti sinora in questo campo.

Un caso particolare degli aggregati ordinati è costituito dagli aggregati *ben ordinati* (C. 6); i corrispondenti tipi ordinali si dicono *numeri ordinali.* Un insieme ordinato è ben ordinato, se esso ed ogni sua parte ammettono un primo elemento. La parte d'un insieme ben ordinato che precede un elemento determinato di esso dicesi *segmento.* Le più semplici serie ben ordinate sono quelle finite, e dopo queste la serie dei numeri naturali; il numero ordinale di quest'ultima è, come già si disse, ω. Mediante il numero ω si possono formare ulteriori numeri $\omega+1$, $\omega+2, \ldots$, $\omega+\omega=\omega.2$, $\omega.2+1 \ldots$, $\omega.\nu, \ldots$, $\omega.\omega=\omega^2$, etc.

Due serie ben ordinate sono simili, oppure un segmento d'una di esse è simile all'altra; i tre casi si esprimono colle relazioni:

$$\alpha=\beta \quad , \quad \alpha>\beta \quad , \quad \alpha<\beta,$$

dove α, β sono i numeri ordinali delle due serie.

La somma e il prodotto di due numeri ordinali sono numeri ordinali, e così la somma di infiniti numeri ordinali costituenti una serie ben ordinata.

Un elemento d'una serie ben ordinata che non ne ha uno immediatamente precedente è un elemento limite; gli elementi limiti d'una serie ben ordinata ne costituiscono un'altra in essa contenuta, che è la sua *derivata,* e che è sufficiente a completamente determinarla, se la serie data non ha un ultimo elemento.

Tra le proprietà dei numeri ordinali noteremo le seguenti.

Qualunque siano α e β, si ha:

$$\alpha+\beta>\alpha \quad , \quad \alpha+\beta\geq\beta \ ,$$

$$\alpha\beta>\alpha \quad , \quad \alpha\beta\geq\beta \ .$$

L'equazione:

$$\mu=\alpha+\beta \ ,$$

dove μ è dato, ammette soluzioni α soltanto per un numero finito di valori β.

Digitized by Google

Se:

$$\mu = \alpha' \beta' = \alpha \beta \quad , \quad \beta' > \beta \ ,$$

ne segue:

$$\alpha' < \alpha \ .$$

Per la generazione dei numeri ordinali trasfiniti (C. 7) Cantor ricorse a due *principii*; il *primo*, creazione del numero $\nu + 1$ dato il numero ν, serve anzitutto per costruire l'intera serie dei numeri finiti (la *prima classe* di numeri ordinali), ma è insufficiente per andare più oltre. Però dal teorema già accennato, che la somma di una serie ben ordinata di numeri ordinali è un numero ordinale, segue che ogni successione crescente di numeri ordinali è una serie fondamentale avente un elemento limite, il quale è il numero immediatamente superiore a tutti quelli della serie. Il passaggio dai numeri di una serie fondamentale al loro limite costituisce il *secondo principio* di Cantor, il quale permette anzitutto la creazione del numero ω come limite della serie 1, 2, ...

Coll'uso dei due principii si può costruire la *seconda classe* dei numeri ordinali, cioè l'insieme dei numeri ordinali di tutte le serie ben ordinate numerabili. Designando con A_1 (*) la potenza di questo insieme, e, per uniformità di notazioni, con A_0 quella dell'insieme dei numeri naturali già indicata con **a**, si dimostra che non v'è alcun numero cardinale compreso tra A_0 e A_1, donde segue che ogni insieme infinito di numeri della prima e della seconda classe è numerabile od ha la potenza A_1.

Ogni numero α della 2^a classe può porsi, ed in un sol modo, sotto la forma:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \nu_0 + \omega^{\alpha_1} \nu_1 + ... + \omega^{\alpha_h} \nu_h \ ,$$

dove i numeri ν_i sono finiti ed i numeri α_i sono numeri decrescenti della 2^a classe. Ogni numero della 2^a classe può decomporsi, ed in un sol modo, in un numero finito di fattori non ulteriormente decomponibili.

(*) Cantor denota le potenze delle varie classi di numeri colla lettera ebraica *alef* munita di indici; noi usiamo invece la lettera A per ovvie ragioni tipografiche.

Digitized by Google

Tra i numeri della 2ª classe hanno particolare importanza i cosidetti *numeri* ε, che soddisfanno alla relazione:

$$\omega^{\varepsilon} = \varepsilon \ ;$$

ogni numero di questa specie è definito da una serie fondamentale:

$$\gamma_1 = \omega^{\gamma} \quad , \quad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1} , \ldots . \ ,$$

dove γ è un numero qualunque della 2ª classe. I numeri ε formano una serie simile a quella dei numeri della 2ª classe; essi soddisfanno alle relazioni:

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon \quad , \quad \alpha\,\varepsilon = \varepsilon \quad , \quad \alpha^{\varepsilon} = \varepsilon \ ,$$

dove α è un numero qualunque minore di ε.

In modo analogo a quanto si è fatto per la 2ª classe, può definirsi (C. 8) come *classe* di numeri l'insieme dei numeri ordinali delle serie ben ordinate aventi una medesima potenza. Così si può estendere il 2° principio di formazione creando il numero Ω superiore a tutti i numeri della 2ª classe, ed in modo simile si può proseguire. Dalle potenze A_0, A_1, A_2, ... delle successive classi, dove $A_{\alpha+1}$ è la potenza della classe dei numeri ordinali delle serie ben ordinate aventi potenza A_α, si deduce un nuovo numero cardinale:

$$A_\omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$$

maggiore di tutti gli A_ν. Il principio d'induzione trasfinita estende la sua portata al caso in cui, anzichè una serie simile a quella dei numeri della 1ª classe, si abbia una serie simile a quella dei numeri d'una classe qualunque; e lo stesso può dirsi per la definizione di limite.

Pei numeri di qualunque classe sussiste la proprietà ben nota dei numeri naturali, che, se $\alpha < \beta$, esiste uno ed un sol numero ξ tale che:

$$\alpha\,\xi \leq \beta < \alpha\,(\xi + 1),$$

proprietà che serve di base all'algoritmo d'Euclide, il quale pertanto è applicabile anche ai numeri trasfiniti.

Digitized by Google

I numeri alef (che noi denotiamo con A); cioè le potenze delle varie classi di numeri ordinali, hanno alcune importanti proprietà. Se $A \leq A'$, si ha:

$$A + A' = A\,A' = A' \ ;$$

se ν è un numero finito, si ha:

$$\nu\,A = A^{\nu} = A \ ;$$

se μ, ν sono numeri finiti, sussiste la relazione:

$$A_{\mu}^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu}\ A_{\mu} \ .$$

A questo punto è d'uopo introdurre una nuova denominazione. Se una serie ben ordinata w senza ultimo elemento contiene una serie parziale w' tale, che per ogni elemento di w esista un elemento successivo appartenente a w', si dice che w' è *confinale* a w. È ovvio che, invece che di serie confinali, si può parlare di numeri ordinali confinali. Se la serie fondamentale che definisce un numero limite γ è simile alla serie dei numeri ordinali precedenti un numero β, γ è confinale a β. Ogni numero d'una data classe è confinale col numero iniziale di essa o con un numero inferiore a questo; quindi ogni numero non iniziale è confinale con un numero inferiore. Ciò non avviene generalmente per un numero iniziale; se accade, il numero si dice *singolare*, nel caso opposto, *regolare*. Si indichi il numero iniziale della 2ª, 3ª, ... classe di numeri con $\Omega_0 = \omega$, $\Omega_1 = \Omega$, ...; se l'indice d'un numero iniziale non è un numero limite, il numero è regolare, ma il teorema reciproco non è stato sinora dimostrato.

Si è veduto che per i numeri ε sussistono le relazioni:

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon \quad , \quad \alpha\,\varepsilon = \varepsilon \quad , \quad \alpha^{\varepsilon} = \varepsilon \ ,$$

dove α ε; di queste la seconda è conseguenza della terza, e la prima della seconda. Furono detti *numeri principali* (C. 9) i numeri che soddisfanno alla prima, alle due prime od a tutte e tre le relazioni; questi ultimi non sono altro che i numeri ε. Il concetto di numero principale può applicarsi anche a tipi d'operazioni più generali.

Si presenta ora una questione fondamentale (C. 10). Un insieme qualunque può sempre disporsi in serie ben ordinata?

Digitized by Google

Cantor asserì già da tempo che ciò è possibile in tutti i casi; ma a Zermelo è dovuta la dimostrazione di tale asserto. La sua dimostrazione si fonda sul *postulato della scelta*, il quale afferma che, se un aggregato S si scompone in aggregati parziali $M, N, \ldots$, esiste un aggregato contenuto in S ed avente uno ed un solo elemento comune con ciascuno degli aggregati $M, N, \ldots$.

Un caso particolare interessante del teorema di Zermelo è questo: l'insieme dei numeri reali compresi in un intervallo qualunque può disporsi in serie ben ordinata; donde segue che il numero $\mathbf{c}$ è un numero alef. Fu dimostrato però che è impossibile effettuare questa operazione mediante funzioni analitiche.

Notiamo ancora che dal teorema di Zermelo segue che due numeri cardinali sono sempre paragonabili.

Tornando alle serie ordinate (C. 11), l'autore espone la teoria di tali serie, quale è stata svolta da Hausdorff. Scomponendo una serie ordinata in due parti A, B in modo che ogni elemento di A preceda ogni elemento di B, possono avvenire 4 casi:

1. A ha un ultimo elemento, B ha un primo elemento *(salto)*;

2. A ha un ultimo elemento, B non ha un primo elemento *(sezione)*;

3. A non ha un ultimo elemento, B ha un primo elemento *(sezione)*;

4. A non ha un ultimo elemento, B non ha un primo elemento *(lacuna)*.

Una serie senza salti si dice *densa*; una serie di cui nessuna parte è densa si dice *sparsa*; una serie senza lacune nè salti si dice *continua*. In base a questi concetti può farsi uno studio profondo delle serie ordinate, ed in particolare di quelle dense.

L'ultimo capitolo della prima sezione (C. 12) contiene alcuni esempi ed alcune applicazioni importanti delle teorie esposte. Noteremo in particolare lo studio, dal punto di vista della nostra teoria, degli infiniti di Du Bois-Reymond, e le ricerche sulla potenza del continuo. Come è noto, Cantor affermò che $\mathbf{c} = A_1$; però dal teorema di Zermelo segue soltanto che $\mathbf{c} \geq A_1$, risultato che si è potuto stabilire anche indipendentemente da questo teorema, costruendo cioè effettivamente aggregati di potenza A_1 contenuti nel continuo.

Digitized by Google

*
* *

Entriamo ora nella *Sezione seconda,* che contiene la teoria degli aggregati di punti.

I principii sui quali si fonda questa teoria (C. 1) sono essenzialmente:

Il teorema di Bolzano-Weierstrass sull'esistenza di un punto limite per qualunque insieme infinito limitato di punti, dove per *punto limite* s'intende un punto in ogni intorno del quale cadono punti dell'insieme diversi da esso;

Il teorema di Borel, il quale afferma che, se per ogni punto d'un insieme *chiuso* (cioè contenente i proprii punti limiti) si assegna un campo che lo contiene, si può scegliere un insieme finito di tali campi racchiudente tutti i punti dell'insieme;

L'estensione del teorema di Borel ad un insieme non chiuso, nel qual caso l'insieme di campi può non essere finito, ma è allora numerabile.

Un teorema notevole, che si può dedurre come conseguenza di quello di Borel, ma che fu stabilito precedentemente a questo, è il seguente: l'insieme dei valori che una funzione analitica prende in un punto interno del suo campo d'esistenza è finito o numerabile.

I punti limiti si possono classificare secondo la loro potenza. Se p è un punto limite d'un insieme di punti ad n dimensioni, e si imagina una successione di ipersfere H_1, H_2,... aventi il centro in p e i raggi decrescenti e tendenti a zero, le potenze degli aggregati parziali contenuti in H_1, H_2,... formano una successione generalmente decrescente; questa, in conseguenza del teorema di Zermelo, ammette un minimo, che si dice *potenza* del punto p.

L'analogia già notata fra il continuo ed i tipi ordinali suggerisce l'idea di cercare se e sino a qual punto possano estendersi ai tipi ordinali le proprietà del continuo. L'estensione è possibile, ma con qualche modificazione; per esempio il teorema di Bolzano-Weierstrass diviene: Ogni tipo ordinale infinito ammette almeno un elemento limite od una lacuna.

I punti limiti d'un insieme P costituiscono il suo *derivato* P' (C. 2); esso è necessariamente chiuso. Analogamente si definiscono i derivati secondo P'', terzo P''', etc.; ciascuno di questi è contenuto nel precedente. Se P', P'', ... contengono infiniti ele-

Digitized by Google

menti, $\mathbf{D}(P', P''', \ldots)$ non è nullo; esso si indica con $P^{(\omega)}$, e si dice derivato d'ordine ω. Anche $P^{(\omega)}$ è chiuso. Procedendo innanzi, si può definire $P^{(\omega+1)}$, $P^{(\omega+2)}$, ..., $P^{(\omega.2)}$, ..., ed in generale $P^{(\alpha)}$, essendo α un numero ordinale qualunque. Però non occorre andare oltre la 2ª classe; esiste infatti un numero α della 1ª o della 2ª classe tale che $P^{(\alpha)}$ è nullo o *perfetto* (cioè identico al proprio derivato).

Questi risultati sono suscettibili di varie generalizzazioni. Così può osservarsi che le proprietà testè esposte appartengono a qualunque successione:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_{\omega.2}, \ldots$$

di aggregati chiusi di cui ciascuno contenga il seguente. Inoltre, dato un aggregato chiuso, si può considerare l'insieme dei suoi punti limiti di potenza non minore di un dato numero cardinale; un tale insieme è chiuso.

Come già accennammo di passaggio, un insieme è chiuso se contiene il suo derivato, perfetto se è identico ad esso; si dice poi *concentrato*, se è contenuto nel suo derivato. Un insieme è *isolato*, se non ha punti comuni col suo derivato. Un insieme è *denso* in un campo, se ogni parte del campo contiene punti di esso; il suo derivato contiene tutti i punti del campo. Abbiamo stabilito sopra definizioni analoghe per i tipi ordinali; noteremo però che la proprietà di essere denso è per un tipo ordinale una proprietà intrinseca, mentre per un insieme di punti dipende anche dal campo in cui esso giace.

Per lo studio della potenza degli aggregati di punti (C. 3) ha particolare importanza il teorema seguente: Se P è un aggregato qualunque di punti, P' si può scomporre, ed in un sol modo, in due aggregati parziali R, S, di cui il primo è numerabile ed il secondo è perfetto; questa seconda parte, la quale non è altro che il $P^{(\alpha)}$ di cui parleremo fra poco, manca sempre e soltanto se P' è numerabile.

Meno semplice è la decomposizione di P stesso; essa fu studiata da Cantor, ma non ha sinora trovato applicazioni notevoli.

Osservando che, se P' è numerabile, lo è anche P, e che, quando P è chiuso, vale evidentemente anche il teorema reciproco, può concludersi (C. 4) che un aggregato chiuso P è numerabile sempre e soltanto se esiste un numero α della prima o della seconda classe per cui $P^{(\alpha)} = 0$. Se P non è numerabile,

Digitized by Google

esiste un α per cui $P^{(\alpha)}$ è perfetto; $P - P^{(\alpha)}$ è numerabile. Ora ogni insieme perfetto ha la potenza **c**, quindi ogni insieme chiuso è numerabile od ha la potenza **c**.

Questo risultato importantissimo non può senz' altro estendersi agli aggregati non chiusi; però non si conoscono aggregati di punti di potenza diversa da **a**, **c** ed A_1, e v' ha ragione di credere che **c** ed A_1 coincidano.

Anche lo studio della struttura degli aggregati chiusi è abbastanza semplice. Un aggregato chiuso, se è denso in un campo, comprende tutti i punti di questo. Se invece un aggregato lineare chiuso non è denso in alcuna parte dell' intervallo che lo contiene, esso consta degli estremi d' un insieme di tratti denso su tutto l' intervallo, e dei punti limiti dell' insieme di tali estremi; ed un teorema analogo vale per gli aggregati chiusi a più dimensioni. Se ne deduce che un aggregato chiuso può sempre considerarsi come il derivato di un certo aggregato numerabile.

Prima ancora che Cantor ponesse i fondamenti della sua teoria, ricerche sui principii del Calcolo integrale avevano messo in luce la necessità di attribuire una *misura* a qualunque aggregato di punti anche non composto di parti continue (C. 5). La questione fu ripresa successivamente da vari punti di vista, e le diverse definizioni adottate non concordano completamente tra loro.

La definizione di Cantor, che riferiamo per semplicità allo spazio ordinario, è la seguente: Si descriva intorno a ciascun punto di P e di P' una sfera di raggio p, e sia $H(p, P)$ lo spazio interno all' insieme di queste sfere; il limite (≥ 0) a cui tende $H(p, P)$ al tendere di p a zero è la *misura* di P. Essa si suol indicare con $J(P)$. Se P' è numerabile, $J(P) = 0$; se P' non è numerabile, $J(P) = J(P^{(\alpha)})$, dove $P^{(\alpha)}$, come sappiamo, è perfetto. Quindi la misura d' un insieme qualunque si riduce a quella d' un insieme perfetto.

Meno semplice è il concetto di misura adottato da Peano e da Jordan. Importa qui rammentare, che un punto d' un insieme si dice *interno* ad esso, se esiste un suo intorno tutto composto di punti dell' insieme; nel caso contrario il punto appartiene al *contorno* dell' insieme. Imaginiamo ora diviso lo spazio in cubi di lato ε; sia $S(\varepsilon)$ la somma dei volumi dei cubi tutti composti di punti interni dell' insieme P, $T(\varepsilon)$ la somma dei volumi dei cubi contenenti punti interni o no di P. Al tendere di ε a zero, $S(\varepsilon)$ cresce e $T(\varepsilon)$ decresce, quindi ciascuna delle due funzioni

Digitized by Google

tende ad un limite, ed il limite della prima non supera quello della seconda. I due limiti prendono il nome di *misura interna* e *misura interna* di P; se essi sono eguali, il loro valore comune è la *misura* di P, e si dice che P è *misurabile*. La misura esterna di Peano e Jordan coincide evidentemente colla misura di Cantor.

Secondo Borel, un aggregato P è *misurabile*, se ad esso si può far corrispondere un numero $m(P)$ avente le seguenti proprietà:

Se P consta di tutti i punti d'un insieme finito o numerabile di campi, $m(P)$ è la somma delle grandezze di questi campi;

Se v è la grandezza del campo contenente P, e Q è l'insieme complementare di P, anche Q è misurabile, e si ha:

$$m(P) + m(Q) = m(P + Q) = v ;$$

Se $P = P_1 + P_2$, e gli aggregati P, P_1 sono misurabili, lo è anche P_2, e si ha:

$$m(P) - m(P_1) = m(P - P_1) = m(P_2) .$$

Prendendo le mosse dalle idee di Borel, Lebesgue imagina di descrivere intorno a ciascun punto dell'insieme considerato un cubo od una sfera di dimensioni arbitrarie *ed anche diverse da punto a punto;* il limite inferiore del volume totale racchiuso da queste figure è la *misura esterna* dell'insieme. La differenza tra il volume del campo in cui l'insieme dato è contenuto e la misura esterna dell'insieme complementare è la *misura interna* del dato. Se le due misure sono eguali, l'insieme è *misurabile*; esso lo è anche secondo Borel.

È facile dimostrare che ogni insieme numerabile ha misura nulla; ciò fa vedere come le definizioni di Lebesgue e di Cantor sieno essenzialmente diverse, giacchè, secondo quest'ultimo, la misura d'un insieme numerabile denso in un campo è la grandezza del campo. La coincidenza ha luogo per gli aggregati chiusi, e quindi in particolare per gli aggregati perfetti.

Merita di essere notato che esistono aggregati perfetti non densi in alcun campo e di misura non nulla.

Anche la seconda Sezione termina con un capitolo (C. 6) contenente esempi ed applicazioni.

Anzitutto si mostra come possano costruirsi aggregati, il cui derivato di un dato ordine finito o no sia composto d'un nu-

Digitized by Google

mero finito di punti. Seguono alcuni esempi di aggregati lineari e piani non densi ed aventi misura nulla o diversa da zero. Una questione interessante per l'Analisi è quella di scomporre il continuo lineare in aggregati parziali densi e tali che la parte d'ognuno di essi contenuta in qualunque intervallo parziale abbia la potenza **c**; la cosa è possibile in infinite maniere, e può anche farsi in modo che l'insieme degli aggregati parziali abbia alla sua volta la potenza **c**. Pure da problemi dell'Analisi è nata la distinzione degli aggregati in aggregati di *prima* e di *seconda categoria*; un aggregato è di prima categoria se può scomporsi in un insieme numerabile di aggregati non densi. Ogni insieme numerabile è evidentemente di prima categoria. Il complemento d'un insieme di prima categoria è di seconda categoria; in particolare lo è il continuo.

Un processo analogo a quello usato da Lebesgue per la definizione della misura permette di dedurre da qualsiasi aggregato, in infiniti modi diversi, un certo aggregato che lo contiene, e che può chiamarsi *aggregato di Borel*. Lo studio degli aggregati di Borel dà luogo a numerosi risultati interessanti; p. es. ogni aggregato isolato, la differenza di due aggregati chiusi, ogni parte di un aggregato chiuso numerabile, è un aggregato di Borel.

Accenniamo ancora brevemente ad alcuni teoremi sugli aggregati di punti di potenza A_1, ed a qualche esempio di insieme non misurabile.

Più importanti sono le ricerche di Fréchet, il quale ha fissato l'attenzione sopra un caso speciale notevole dell'equivalenza, quello in cui la corrispondenza biunivoca è anche continua. Egli dice in tal caso che i due aggregati hanno eguale *dimensione*; e definisce pure la maggioranza e la minoranza. Ogni insieme lineare numerabile, denso almeno in una parte dell'intervallo che lo contiene, ha la stessa dimensione Δ dell'insieme dei numeri razionali. Un insieme ha la stessa dimensione del continuo (che si denota con 1) sempre e soltanto se comprende tutti i punti d'un intervallo parziale. Ogni insieme perfetto non denso ha la stessa dimensione $\Delta_1 < 1$ dell'insieme dei numeri irrazionali; non esiste alcun insieme avente dimensione compresa tra Δ_1 ed 1.

Un breve cenno sullo *spazio nullo* di Baire chiude il volume.

Digitized by Google

*
* *

Finiamo con una dichiarazione e con una giustificazione.

Noi non siamo pienamente persuasi dell' utilità delle troppo lunghe recensioni; se in passato peccammo qualche volta in questo senso, ci siamo da tempo ravveduti. Abbiamo creduto di dover fare un' eccezione nel caso attuale, non tanto per l' importanza, quanto piuttosto per la natura dell' opera che ci sta dinanzi. Essa si propone di presentare un quadro dello stato attuale della teoria degli aggregati; ma la sua vera missione è quella di far conoscere i problemi che restano ancora insoluti in questo campo, e di mostrare i punti d' attacco a chi tali problemi voglia affrontare. Abbiamo pertanto pensato di far opera non inutile, dando dell' interessante volume un riassunto abbastanza largo, perchè chi legge ne possa desumere facilmente quali parti dell' opera sieno più atte ad ispirare ricerche in uno o in altro determinato senso. È il modesto ufficio di guida che ci siamo assunti; e della nostra fatica ci riterremo compensati, se essa varrà ad acquistare qualche nuovo cultore alla bella teoria di cui il genio di Giorgio Cantor ha arricchito l'Analisi.

G. Vivanti.

Matematiche generali.

A. Sainte-Laguë. *Notions de Mathématiques.* Avec Préface de G. Koenigs. Paris, A. Hermann et Fils, 1913, 8°. p. VII + 512.

Da qualche tempo si è costituito in Francia, sotto la denominazione di « Matematiche generali », un programma d' insegnamento per le scienze esatte, non dogmatico, astratto e presentante le teorie esclusivamente sotto il loro aspetto logico, ma inteso a tenere continuamente desta l' intuizione con l' esame diretto delle cose e l' eventuale appello all' esperienza. Benchè in Italia non esista finora un siffatto insegnamento (almeno per quanto concerne l' istruzione media, chè in quella superiore il corso di matematica per i chimici ed i naturalisti sembra doversi informare a concetti dell' indicato genere), pure l' opera del Sainte-Laguë, destinata appunto a svolgere il suindicato programma, riuscirà interessante ed istruttiva per tutti coloro a cui piace di essere tenuti al corrente delle innovazioni che si vanno

Digitized by Google

facendo nei metodi didattici. Tali innovazioni in parte si riferiscono al piano generale, in parte al modo di svolgimento. Le prime sono percepibili esaminando l'indice delle materie svolte, che qui esponiamo in compendio:

Aritmetica. — I. Numeri interi. — II. Divisibilità. Numeri primi. — III. Frazioni. Radici. — IV. Misura delle grandezze. — V. Calcolo degli errori. Calcoli numerici.

Algebra. — I. Numeri positivi e numeri negativi. — II. Calcolo algebrico. — III. Equazioni e problemi di primo grado. — IV. Equazioni e problemi di secondo grado. — V. Progressioni e logaritmi. — VI. Funzioni e loro rappresentazione grafica: derivate.

Trigonometria.

Geometria. — I. Rette e piani. — II. Parallelismo. — III. Circonferenza e sfera. — IV. Relazioni metriche. — V. Lunghezze, aree e volumi. — VI. Costruzioni grafiche. — VII. Geometria descrittiva. — VIII. Metodi geometrici (in particolare: procedimenti generali per risolvere i problemi).

Cinematica.

Il lettore, dalla semplice ispezione di quest'elenco di temi, sarà colpito da alcune innovazioni degne di nota; ad esempio troverà la trigonometria posposta alla rappresentazione grafica delle funzioni, noterà praticata su larga scala e nel modo più naturale la fusione della planimetria con la stereometria, introdotta la geometria descrittiva come un capitolo della geometria generale, quale naturale proseguimento dei metodi per risolvere i problemi, ecc. Sopra altre innovazioni di minore portata ci è impossibile arrestarci per esiguità di spazio. Ma non possiamo non far menzione della bellissima raccolta di (500) esercizi, classificati (mediante apposizione di una delle lettere A, B, C) in base alla loro difficoltà, e di cui viene, con appositi richiami, indicata la dipendenza dalle varie teorie; nel loro enunciato va rilevato la tendenza costante e lodevolissima di avvicinare la matematica alle realtà della vita sociale.

Aggiungiamo da ultimo che l'opera in esame si chiude con parecchie utili tabelle numeriche e con un riassunto delle principali proposizioni e formole: per ciò essa, oltre essere un manuale scolastico (relativo ad un corso di uno o più anni?), può servire anche quale prezioso *vade-mecum* per chi deve applicare le principali teorie matematiche.

G. L.

Digitized by Google

E. FABRY. *Problèmes d'analyse mathématique.* Paris, A. Hermann et Fils, 1913. 8° gr. p. 460 (Prezzo fr. 12).

Questo volume sarà singolarmente accetto in Francia da coloro che si preparano agli esami di concorso, chè si trovano ivi gli enunciati e le soluzioni di un gran numero di questioni già proposte a quegli esami e di altre analoghe. Ma riuscirà utile anche oltre i confini della vicina repubblica perchè contiene applicazioni di teorie elevate su cui è difficile trovare buoni esercizi; ciò risulta dall'elenco dei capitoli in cui si divide l'opera in questione: I. *Quadrature.* - II. *Integrali multipli; superficie; volumi.* - III. *Funzioni analitiche. Integrali curvilinei.* - IV. *Equazioni differenziali.* - V. *Curve piane.* - VI. *Curve sghembe e superficie.* - VII. *Linee asintotiche; linee di curvatura.* - VIII. *Superficie rigate.* - IX. *Equazioni alle derivate parziali.* - X. *Applicazioni geometriche delle equazioni alle derivate parziali.* - XI. *Differenziali totali.* - XII. *Funzioni ellittiche.* G. L.

Geometria projettiva.

J. L. S. HATTON. *The principles of projective geometry applied to the straight line and conic.* Cambridge, University Press 1913. 8° gr. p. X-366.

Il presente manuale di geometria projettiva, destinato a coloro che aspirano un « honours degree in mathematics » presso una delle Università di Cambridge, Londra, Manchester ed Oxford, è interessante per chi ama di constatare la varia fortuna della geometria projettiva. Esso, al pari di altri che segnalammo in passato (cfr. *Bollettino*, T. IX, 1906, p. 118; T. XIII, 1911, p. 104), permette di vedere come le idee fondamentali della geometria di posizione vadano acquistando sempre maggior favore in Inghilterra, ma come gli abitanti del Regno Unito si trovino oggi, almeno per quanto concerne il pubblico insegnamento, al livello contrassegnato dai lavori di Chasles e Steiner; chè le relazioni metriche hanno un posto singolarmente onorevole e importante. Ma l'A., promettendo un altro volume destinato alla « teoria degli immaginari », mostra di conoscere anche i lavori di Staudt e di Reye, e di riconoscere nelle ricerche ivi consegnate il valore a tutti noto.

È necessario (trattandosi di un libro inglese) dire che ogni Capitolo contiene una buona collezione di esercizi?

G. L.

Digitized by Google

Geometria descrittiva.

E. Müller, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen*. II Band, I Heft. Mit 140 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912, 8°. p. VII + 129 (Prezzo Mk. 4.40).

In questa continuazione di un' opera i cui inizi sono noti ai nostri lettori (*Bollettino*, T. XIII, 1911 p. 11-14), la tendenza verso le applicazioni alla scienza dell' ingegnere si manifesta in modo ancora più accentuato. Infatti, stabiliti coi primi Capitoli le definizioni e le proposizioni fondamentali relative al metodo dei piani quotati, se ne fanno ampie applicazioni a questioni concernenti la costruzione di strade. Ciò porge occasione all' autore di addentrarsi nell' esame delle linee e dei punti notevoli che possono presentare le superficie topografiche e così toccare un tema che si connette alla topologia delle superficie. Si ritorna poi nel campo proprio dell' ingegneria civile con un Capitolo sopra le questioni geometriche relative alla costruzione dei tetti, il quale termina la III Sezione dell' opera in esame.

La IV concerne l' assonometria ortogonale e consta di due Capitoli: nel I ne vengono stabiliti i principi, mentre nel II sono risolti i principali problemi di geometria descrittiva mediante l' assonometria ortogonale ridotta, nel modo a tutti noto, a metodo di rappresentazione; inoltre è data la rappresentazione delle superficie coniche o cilindriche, della sfera e delle superficie di rotazione; l' a. si trattiene in particolare sul toro, fra l' altro dimostrando che il contorno apparente di tale superficie, in assonometria ortogonale, si può definire come la curva parallela all' ellisse (1). Lo stesso metodo di rappresentazione è applicato ad un grande numero di figure che s' incontrano in architettura e nella meccanica pratica, il che tornerà singolarmente gradito al pubblico a cui l' autore si dirige di preferenza. Aggiungiamo, finendo, che le molte ed esatte citazioni fatte dall'A. illu-

(1) Questa proposizione non è nuova, come l' a. sembra credere (cfr. G. Loria, *Spezielle alg. und transs. ebene Kurven*, II Bd, 2ª Aufl., Leipzig, 1911, p. 279).

Digitized by Google

strano dal punto di vista storico e bibliografico i temi da lui svolti ed in certi casi porgono al lettore il mezzo di completare le cognizioni sopra temi appena sfiorati. L. G.

TH. SCHMID, *Darstellende Geometrie,* I Band, mit. 170 Figuren (Sammlung Schubert LXV). Berlin und Lepzig, Göschen 1912. 8°. p. VI + 279 (Prezzo Mk. 7).

Come la precedente, l'opera di cui ci apprestiamo ad analizzare il I. Volume è prodotto d'un insegnamento fattto al Politecnico di Vienna (ove, per il grande numero di studenti si trovano due cattedre di geometria descrittiva); e poichè in Austria la disciplina di cui ci occupiamo viene insegnata già nelle scuole secondarie, così il prof. Schmid si ritenne autorizzato a dare alla propria esposizione un indirizzo più elevato di quello che ha di necessità un primo insegnamento. Ed infatti, invece di prendere le mosse dai soliti due piani di proiezione usati nel metodo di Monge, egli partì da un sistema cartesiano e così pose in luce sin dal principio l'intimo legame che passa fra geometria analitica, e geometria descrittiva.

Nel I. Capitolo del suo volume egli espose quanto concerne la rappresentazione dei punti, delle rette e dei piani nonchè delle figure più complicate limitate da rette e piani, introducendo sin da ora quelle nozioni relative alle ombre che bastano allo studio dei fenomeni d'illuminazione sui poliedri. Richiamiamo l'attenzione del lettore sopra alcune nuove considerazioni (p. 25-6) concernenti le posizioni dei piani dello spazio che ci sembrano dotate di novità ed importanza.

Il II. Cap., si riferisce a la sfera, il cilindro ed il cono di rotazione e contiene quanto è essenziale della teoria delle coniche e dei fenomeni d'illuminazione di quei solidi.

Lo sviluppo delle superficie coniche e cilindriche, le proprietà delle eliche cilindriche e delle quartiche che nascono come intersezioni di coni, riempie il III Cap., con cui, almeno momentaneamente, si abbandona il metodo di Monge. Chè l'ultimo Cap. concerne l'assonometria ortogonale, con applicazione ai poliedri, alla sfera ed ai coni e cilindri di rotazione ed altre figure che s'incontrano nella meccanica applicata.

Le molte ingegnose ed utili osservazioni sparse in tutto il libro mostrano che ci troviamo di fronte ad un lavoro lungamente

Digitized by Google

pensato, frutto di lunghi anni d'insegnamento. Una parola di lode va tributata alle figure che, pur essendo di piccole dimensioni, sono oltre ogni dire chiare ed espressive; ed un'altra alla ricca collezione di esercizi, alcuni dei quali si riferiscono a questioni meccaniche. G. L.

J. MAJCEN, *Osnove deskiptivne geometrije za srednjoskolske kandidate matematicke.* Sa 112 slika u tekstu. Zagreb, Kugli, 1913. 4°. p. 183.

L'introduzione della geometria descrittiva fra le materie richieste in Austria agli aspiranti ad una cattedra nell'insegnamento secondario ha dato origine a corsi universitari sopra quella materia: il presente volume compendia quello che fu tenuto dal prof. Majcen a Zagabria (o Agram che dir si voglia). L'ignoranza da parte di chi scrive della lingua in cui tale opera è scritta ne vieta un particolareggiato resoconto. Ma le numerose e belle figure che l'adornano permettono di formarsi un concetto almeno approssimativo del suo piano: si vede così che si è in presenza di una trattazione elementare della materia, fatta col solo uso del metodo di Monge e che non abbraccia figure più complicate dei poliedri e dei coni e cilindri. Il volume si chiude con una collezione di 100 esercizi proposti; ma poichè, come è naturale, non sono illustrati da alcuna figura, non possiamo indicarne il contenuto.

Questo annuncio, per quanto superficiale, dà il mezzo al lettore di constatare come la disciplina creata da Monge sia sempre più apprezzata in tutto il mondo e come i cultori di essa vadano incessantamente aumentando.

G. L.

Notizie.

ANNUAIRE POUR L'AN 1915 publié par le Bureau des Longitudes. Avec une notice scientifique. - Paris, Gauthier-Villars et C. (Prezzo fr. 1, 50).

Malgrado le tragiche condizioni attuali della Francia, questo eccellente *vade mecum* fu pubblicato con la consueta regolarità e con le solite preziose rubriche. Inoltre contiene un'elaborata memoria di G. Bigourdan sopra " Les méthodes d'examen des miroirs et des objectifs „ con 78 figure.

Digitized by Google

***

TEMA PROPOSTO DAL R. ISTITUTO VENETO per il premio di Fondazione Querini-Stampalia: « Apportare qualche notevole perfezionamento alla teoria delle soluzioni periodiche dei sistemi differenziali ». Scadenza 31 Dicembre 1917. Premio L. 3000. Le memorie dei concorrenti potranno essere scritte in italiano, francese, tedesco od inglese.

***

TEMA PROPOSTO DALLA SOCIETÀ JABLONOWSKI PER L'ANNO 1916. « Si chiede qualche contributo alle teorie delle equazioni differenziali funzionali lineari. È specialmente desiderata una trattazione approfondita di nuovi casi particolari ». Premio Mk. 1500; scadenza 31 ottobre 1916.

***

GIUBILEO DELLA SCOPERTA DEI LOGARITMI. È questo il tema scelto dal prof. A. Gutzmer come soggetto dell'orazione da lui tenuta il 12 luglio 1914 assumendo l'ufficio di rettore dell'Università di Halle. In essa sono ricordati i precursori di Nepero ed a ragione è vantata la grande importanza teorica e pratica della invenzione da lui fatta; incidentalmente sono fatti conoscere avvenimenti e circostanze poco o mal note.

***

DIE DEUTSCHE MATHEMATIK. È questo il titolo di un articolo pubblicato da H. E. Timerding nell' *Internationale Monatsschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik* del 16 dicembre 1914. Prescindendo dall'intenzione polemica in cui è scritto, la quale è giustificata dalla situazione politica del momento, esso presenta un quadro fedele dell'opera compiuta a partire da Gauss dai matematici tedeschi; onde va segnalato a tutti coloro che s'interessano allo svolgimento storico delle investigazioni matematiche.

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

Un Mathématicien Belge du XVIième **Siècle** (Lucien Godeaux) pag. 33-36.
La corréspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathematiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 36-40.
Storia (A. Mieli, L. Carnera, G. L., A. Pascal), pag. 40-56.
Probabilità (P. Pizzetti), pag. 56-58.
Meccanica razionale (T. Levi-Civita, G. L.), pag. 58-59.
Teoria degli insiemi (G. Vivanti) pag. 59-74.
Matematiche generali (G. L.), pag. 74-76.
Geometria projettiva (G. L.), pag. 76.
Geometria descrittiva (G. L.), pag. 77-79.
Notizie (Annuaire du Bureau des Longitudes, Tema proposto dal R. Istituto veneto. Tema proposto dalla Società Jablonowski per l'anno 1916, Giubileo della scoperta dei logaritmi, Die Deutsche Mathematik, pag. 79-80.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

BOREL. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
BRAUDE. — Les coordonnées intrinséques. L. 2,25.
CASTELNUOVO. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III. L. 15.
DOLBNIA J. — Oeuvres mathématiques publiés par Kriloff. L. 12,50.
ENRIQUES. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
GUILLAUME. — Les récents progrés du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: SANDEN. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: HJELMSLEV. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
HAUSDORFF. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
SALPETER. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
SMITH e MIKAMI. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
ZEUTHEN. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

Digitized by Google

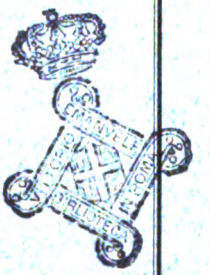
N. 3 PERIODICO TRIMESTRALE 1915

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA



ANNO XVII
1915

III FASCICOLO

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1915

Pubblicato il 20 agosto 1915.

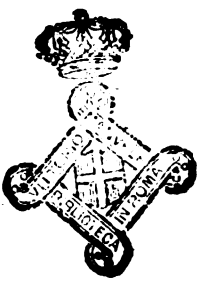
Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVII, Fasc. III: **Luglio, Agosto e Settembre** 1915

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le
Dr. J. H. GRAF, *Professeur à l'Université de Berne*



II.

Correspondance entre E. Beltrami et L. Schläfli, 1870-1891.

Eugenio Beltrami, né à Cremona le 16. XI. 1855, mort à Roma le 18. X. 1900, 1862 professeur d' analyse algébrique à Bologna, 1863 prof. de géodésie à Pisa, 1866 prof. de mécanique rationnelle à Bologna, 1873 à Roma, 1876 prof. de physique mathématique à Pavia, 1891 de nouveau à Roma, membre et président de la R. Accademia dei Lincei.

Nous avons le manuscrit de deux lettres de Schläfli à Beltrami et des lettres originales de Beltrami à Schläfli.

1. Manuscrit d' une lettre de L. Schläfli à E. Beltrami sans date, mais probablement de l'année 1870.

Haben Sie vielen Dank für die werthvolle Abhandlung über bi-kubische Formen, die Sie mir letzthin zugesandt haben. Verzeihen Sie, wenn ich mich hier zu Ihnen über etwas ausspreche, das, wie mich dünkt, in den Mailänder Annalen erscheinen sollte, und das ich selbst italiänisch auszudrücken mich nicht im Stande fühle. Herr Becker (*) in Zürich hat vor kurzem eine Broschüre he-

* Becker, Iohann Carl geb. 27 X. 1833 in Mainz, + 27. VII 1877 in Bruchsal, seit 1859 Privatlehrer der Mathematik in Zürich, dann 1871 Prof. am Gymnasium Schaffhausen, 1873 in Mannheim, 1877 in Wertheim, 1881 in Bruchsal. Die bezügliche Abhandlung heisst: Abhandlung aus dem Grenzgebiet der Philosophie und Mathematik. 62 S. 8° Zürich 1870.

Digitized by Google

rausgegeben, an deren Titel ich mich nicht mehr genau erinnere, es war ungefähr: über das Gränzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie. Ich fand zu vielen Unsinn in der Broschüre als dass ich sie hätte behalten mögen, und habe sie daher nur durchblättert. Herr Becker macht sich darin über Herrn Cremona lustig, wegen der Art, wie er in seiner Teoria geometrica delle curve piane die projectivische Beziehung zweier fester Tangenten eines Kegelschnitts aus der Eindeutigkeit der Bestimmung des einen homologen Punctes durch den andern herleitet. Er greift Gauss, Riemann und andere an, die sich das Recht genommen haben, über die wirkliche Beschaffenheit des Raumes nachzudenken und an der Richtigkeit der Euklidischen Geometrie zu zweifeln, indem er mit der Autorität Kants zu schlagen meint, obgleich soviel sicher ist, dass Kant das Axiom der Parallelentheorie so wenig bewiesen hat als irgend ein anderer. Kant stand im guten Glauben, dass jedermann mit der Euklidischen Geometrie zufrieden sei, und erklärte sich dieses daraus, dass Raum und Zeit nur der menschlichen Organisation eigenthümlich, aber der Aussenwelt fremd seien. Diese Behauptung Kants nennt nun Becker einen Beweis, der alle diejenigen, welche an eine wirkliche Erscheinungsreihe, die von der Empfindung des menschlichen Individuums unabhängig ist, glauben, widerlegt habe. Becker bewegt z. B. ein Volumen innerhalb des Raumes von drei Dimensionen, in dem es sich befindet, und meint damit bewiesen zu haben, dass man sich kein Continuum von mehr als drei Dimensionen vorstellen dürfe. Wie mich dünkt, liegt in der Kantischen Ansicht eine doppelte Willkür; ein Mal nimmt er an, die in Begriffe umgewandelten geometrischen Anschauungen und bezüglichen Axiome seien der menschlichen Organisation durchaus nothwendig, so dass niemand an ihrer Richtigkeit zu zweifeln im Stande sei, und zweitens will er diese Thatsache dadurch erklären, dass alle diese Anschauungen und Begriffe eine subjective Täuschung seien.

2. *Manuscrit de la seconde lettre de L. Schläfli à E. Beltrami sans date, mais probablement aussi de l'année 1870 ou 1871.*

Ueber die Beziehung zwischen Analyse und geometrischer Intuition.

Im mündlichen Verkehr und in Schriften habe ich oft bemerkt, dass in Bezug auf die Ansichten über Raum und Zeit Kant, dessen Verdienste um die Philosophie allgemein anerkannt sind, und der auf die wissenschaftiche Bewegung einen mächtigen Einfluss

Digitized by Google

ausgeübt hat, so sehr als Autorität gilt, dass man sich verwundert, wenn jemand verschiedene Ansichten zu haben sich erlaubt. Voriges Jahr gab zum Beispiel Herr Becker in Zürich eine kleine Schrift heraus, worin er über mehrere ausgezeichnete Mathematiker sich lustig macht, weil sie noch an Dingen zweifeln können, die Kant längst bewiesen habe. Sieht man aber diesen vorgeblichen Beweis an, so findet man, dass er nur eine individuelle Hypothese ist, welche für Kant das Fundament bildet, auf dem er seine Ansicht über das Verhältniss des menschlichen Bewusstseins zur Reihe der äussern Erscheinungen aufbaut. Kant nimmt als gewiss an, dass niemand an den Axiomen der Euklidischen Geometrie zweifeln könne, erkennt hierin die Möglichkeit *synthetischer Urtheile a priori* und schliesst daraus, dass Raum und Zeit für den Menschen nothwendige *Formen der reinen Anschauung* seien, in denen *synthetische Urtheile a priori* liegen, und die aller Erfahrung vorangehen. Dem *Ding an sich* aber sind nach Kant diese Formen fremd, und da alle Erfahrung durch diese Formen vermittelt wird, so ist der Mensch von einer Erkenntniss des *Dinges an sich* völlig abgeschnitten. Es bleibt dann freilich räthselhaft, warum Kant nicht auch den Begriff des Seins zu jenen der vernünftigen Organisation des Menschen nothwendigen Formen, die keinen Anspruch auf objective Gültigkeit haben, zählt und dadurch auch das *Ding an sich* beseitigt.

Thatsächlich sind aber die sogenanten *Anschauungen* ursprünglich für jeden Menschen mit den übrigen Erfahrungen verflochten und in begrifflicher Absonderung und Schärfe noch gar nicht vorhanden. Erst durch Tradition und Nachdenken in Wechselwirkung mit der Erfahrung entstehen später in uns die scharfen auf Raum und Zeit bezüglichen Begriffe, die eines logischen Processes fähig sind. Die Begriffe der Geraden und der Ebene z. B. sind entweder von Natur oder durch Kunst in einem hohen Grade von Genauigkeit verwirklicht; und der noch an ihrer Darstellung haftende Fehler wird durch einen intellectuellen Act, der vielleicht, aber mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit, eine Hypothese ist, verbessert; und man gelangt so, wie mir scheint, endlich zu der Ueberzeugung, dass der Raum der geraden Linie und der Ebene im allgemeinsten Sinne fähig ist. Man vergleiche hiemit die Art, wie man dazu gelangt, aus der Verwicklung der Naturerscheinungen heraus einzelne physikalische Gesetze übereinstimmend zu finden, und ich glaube, jemand wird den Einwand, dass wir die Gerade nie reälisiren können, und dass uns daher ihr Begriff angeboren sein

Digitized by Google

müsse, nicht stichhaltig finden. Was ferner z. B. das Axiom der Parallelentheorie betrifft, so hat es noch niemand bewiesen; es kann daher nur diejenige Art der Sicherheit haben, die überhaupt Abstractionen aus der Erfahrung zukömmt, obgleich der Grad seiner Wahrscheinlichkeit viel höher ist als bei den meisten nichtgeometrischen Abstractionen und Axiome der Geometrie ein Mal entdeckt worden, in ähnlicher Weise, wie die Begriffe der gleichförmigen und gleichförmig-beschleunigten Bewegung und ihre Bedeutung für die Natur nicht von jeher dagewesen, sondern ein Mal entdeckt worden sind; der Unterschied ist nur der, dass wir hier die historische Kenntnis von der Entdeckung haben, während sie uns dort mangelt.

Sobald als aus den Grundbegriffen der Geometrie des wirklichen Raums, d. h. des Raumes, worin die sinnlich wahrnehmbaren Körper sich befinden, der pythagoräische Satz hergeleitet ist, hat man auch den analytischen Ausdruck für die Distanz zweier Punkte des Raumes gefunden; man weiss jetzt nicht nur, dass Ebene und Gerade durch lineare Gleichungen dargestellt werden, sondern man kann auch die Oberfläche der Kugel und den Kreis durch Gleichungen darstellen, und kann in Verbindung damit die analytische Bedeutung des rechten Winkels und des Winkels überhaupt aufstellen; für die analytische Betrachtung sind nur Distanz, Kugel und rechter Winkel untrennbare Begriffe, die ein Ganzes bilden; und ausser der Beschränkung auf drei Dimensionen hat jezt der Raum für die analytische Erkenntnis einen speciellen Charakter, den man etwa in folgenden drei Urtheilen aussprechen kann: 1° Der Raum ist *linear*, d. h. er ist der Ebene und der Geraden im allgemeinsten Sinn fähig. 2° er ist *unendlich*, d. h. die unendlich entfernte Ebene hat eine besondere Bedeutung, sie bleibt beim Uebergang von einem Cartesianischen Coordinatensystem zum andern dieselbe; mit andern Worten, zwischen zwei solchen Coordinatensystemen gibt es keine bilineare Verwandlung. 3° er ist *orthogonal*, d. h. eine gewisse imaginäre Curve in der unendlich entfernten Ebene hat eine besondere Bedeutung. Gegenüber der analytischen Allgemeinheit, mit der ohne weitere Beschränkung der Begriff eines Gebiets von drei Dimensionen behandelt werden könnte, ist dieser Charakter des Raumes ein sehr stark bestimmter; der Raum ist nun durch Merkmale definirt, wie nur irgend ein Naturobjekt es sein kann, und hat dadurch aufgehört, nur eine Anschauung zu sein; er befindet

Digitized by Google

sich in der Gewalt der Begriffe. Von nun an sind alle intuitiv geometrischen Vorstellungen auch in analytische übersetzbar, und umgekehrt diese, solange sie reelle geometrische Elemente betreffen, in jene. Seien die genannten Begriffe in das intuitive oder in das analytische Gewand gekleidet, die mittelst derselben geführten Raisonnements haben immer dieselbe Gültigkeit. Ausschliesslich geometrische Behandlung, oder ausschliesslich analytische Behandlung, derselben Gegenstände sind unabhängig von einander und führen zu denselben Resultaten; das nämliche gilt, wenn beide Arten der Behandlung mit einander abwechseln und einander unterstützen; und wenn eine solche Mischung von Geometrie und Analyse den Gedankenlauf erleichtert und beschleunigt, warum sollte man sie nicht anwenden? Es kömt nun der Umstand hinzu, dass die Analyse nicht wie die reine Geometrie durch die Bedingung der Realität der betrachteten Gebilde beschränkt ist, und dass diese, wenn sie durchaus alle der Analyse entlehnten Begriffe verschmäht, einen viel grössern Kraftaufwand nöthig hat, als wenn sie den immerhin mit ihren eigenen Hülfsmitteln gefundenen Resultaten nachträglich durch Ausdehnung auf das imaginäre Gebiet den allgemeinen analytischen Charakter zuspricht, um mit leichter Mühe zu andern realen Erscheinungsweisen desselben analytischen Gebildes überzugehen.

Eine solche Verstärkung der intuitiven Behandlung der Geometrie durch analytische Begriffe erkennt nun zwar Herr Becker in seiner Schrift nicht an, indem er sich auf den Standpunkt derjenigen stellt, welche den Gebrauch analytischer Hülfsmittel in ihrer Behandlung der Geometrie sich untersagen und sich auf die Intuition beschränken. Aber er gewinnt dadurch kein Recht, sich über diejenigen lustig zu machen, welche einen andern Standpunct einnehmen. Er greift unter anderm einen von Herrn Chasles gegebenen Beweis für die Projectivität zweier fester Tangenten eines Kegelschnitts, die von einer beweglichen Tangente geschnitten werden, an, einen Beweis, den Herr Cremona in seine Theorie der Planimetrie aufgenommen hat, und der ganz einfach aus dem eindeutigen Entsprechen je zweier homologen Schnittpuncte die Projectivität der zwei festen Tangenten folgert, indem er diesen Beweis dadurch ad absurdum zu führen vermeint, dass er an die Stelle des Kegelschnitts ein in sich zurückkehrendes reelles Stück einer andern Curve setzt, das keinen reellen Wendepunct hat. Herr Becker ignorirt aber gänzlich, dass das Entspre-

Digitized by Google

chen zweier homologen Puncte der zwei festen Tangenten beim Kegelschnitt algebraisch bestimt ist, und dass jede dieser Tangenten nicht nur als Ort ihrer reellen, sondern auch ihrer imaginären Puncte gedacht wird.

Da Herr Becker die Zusamengehörigkeit der analytischen und der intuitiven geometrischen Vorstellungen nicht anerkennt, so ist es leicht zu begreifen, dass er auch ein analytisches Continuitätsgebiet von mehr als drei Dimensionen für einen Unsinn ansieht und es zeigen zu können glaubt, indem er einen Körper im selben Raum von drei Dimensionen, dessen Theil dieser Körper ausmacht, fortbewegt und so nur einen Theil dieses Raumes beschreibt. Ganz ebenso kann er auch eine begränzte ebene Figur in ihrer Ebene fortbewegen, um wieder nur eine ebene Figur zu bekommen.

Ich möchte noch etwas besprechen, das die Verbindung der Analyse mit der Intuition betrifft. Herr Geiser hat in diesen Annalen zwei reelle projectivische Ebenen mit der Gesamtheit ihrer reellen Puncte als piani rappresentativi zweier unabhängiger Variabeln gebraucht und natürlich gefunden, dass das eindeutige Entsprechen je zweier homologer Puncte beider Ebenen nur durch zwei Gleichungen, nicht durch eine einzige, dargestellt werden kann; und obgleich ihm im Beginn der Arbeit der Gedanke vorschwebt, alle reellen und imaginären Puncte zweier Geraden paarweise in eindeutige Beziehung zu setzen, so spricht er doch am Ende die Ansicht aus, dass man die zwei Geraden nicht durch zwei piani rappresentativi ersetzen dürfe, die projectivisch auf einander bezogen werden. Ich möchte beifügen, dass der Punct des piano rappresentativo nur ein *Zeichen* ist für die durch ihn dargestellte imaginäre Zahl; und dass die Erweiterung des Begriffs der Zahl von der reellen zur imaginären nicht aus der Intuition einer reellen Ebene, sondern auf analytischem Boden, aus der Möglichkeit eine Classe von quadratischen Gleichungen durch reelle Verwandlung auf die Form $x^2 + 1 = 0$ zurück zu führen, entspringt. So wenig als z. B. die lautlichen Elemente eines Worts maassgebend sind für den Begriff, den das Wort bezeichnet, ebenso wenig kann das anschauliche Bild (der Punct einer Ebene), mit dessen Hülfe wir uns eine beschränkte Classe von Rechnungen mit imaginären Zahlen erleichtern, den Begriff der imaginären Zahl selbst ersetzen. (*Continua*)

Digitized by Google

Opere complete e Enciclopedie.

Oeuvres mathématiques de Jean Dolbnia, *publiées sous les auspices de l'Ecole supérieure des Mines avec une préface de* G. Darboux *et une Notice sur le vie et les travaux scientifiques de Dolbnia par* N. Kryloff. Paris, Hermann, 1913. 8° p. XIV-348 (prezzo fr. 12).

Giovanni Dolbnia morì a 59 anni il 2 Febbraio 1912 professore alla Scuola superiore delle miniere di Pietroburgo (o Pietrogrado che dir si voglia) ove professava dal 1898 e di cui fu anche rettore. Insegnante eminente e scienziato originale, trovò fra i propri colleghi e discepoli un gruppo di ammiratori che vollero elevare alla sua memoria il più degno monumento raccogliendone le pubblicazioni scientifiche. Però si limitarono sinora ai lavori pubblicati in giornali francesi, lasciando in disparte quelli, non meno numerosi od importanti (1), apparsi nella lingua natia del Dolbnia; così facendo essi assolsero la parte più facile e, diciamo pure, scientificamente meno importante del loro còmpito, perchè, se per il progresso delle matematiche offre un'importanza secondaria il radunare in un volume scritti che si trovano in raccolte diffusissime e scritte in una lingua che tutti conoscono, sarebbe del più alto interesse il diffondere in tutto il mondo lavori sepolti in pubblicazioni periodiche clandestine e scritti in una lingua accessibile a pochissimi. Perciò la scienza attende che il prof. Kryloff ed i suoi collaboratori compiano la meritoria opera intrapresa, pubblicando tradotti in francese gli altri lavori del loro eminente connazionale. G. L.

L. Cremona, *Opere matematiche. Pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei.* 4° T. I, 1914, p. V + 497. T. II, 1915, p. 459. Milano, U. Hoepli (Prezzo di ciascun volume L. 25).

Salutiamo con piacere questa pubblicazione, che viene degnamente ad accrescere la collezione delle opere dei matematici italiani del tempo nostro: dopo Brioschi, Betti, Beltrami e nell'attesa di Genocchi, nessuno meritava più il massimo dei postumi onori che può concedersi ad uno scienziato del più insigne rappre-

(1) Quanti e quali siano, emerge dall'elenco dei loro titoli che si trova in testa al volume di cui discorriamo.

Digitized by Google

sentante in Italia della pura geometria. L'edizione, fatta sotto la direzione del prof. E. Bertini, è destinata a contenere tutti gli scritti pubblicati dal Cremona, eccezion fatta per la « Geometria projettiva » e « Le figure reciproche della statica grafica » che l'Hoepli si propone di ristampare a parte. Ogni lavoro venne sottoposto ad un'accurata revisione, tanto da parte del direttore, quanto di un geometra avente speciale competenza sull'argomento, tenendo conto delle modificazioni od aggiunte indicate dal Cremona in copie dei lavori suoi esistenti nella sua biblioteca od altrove. Quando poi si trattava di scritti tradotti, si tenne conto delle migliorie apportate al dettato per suggerimento dell'autore.

Il I volume delle *Opere* comprende trentun lavori, pubblicati nel periodo 1855-1861; il solo fatto che vi si trova, fra l'altro, l'« Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane », divenuta una ricercatissima rarità bibliografica, è sufficente ad assicurargli una festosa accoglienza nella biblioteca di qualsia geometra.

Altrettanto può ripetersi riguardo al II, che abbraccia 47 lavori pubblicati fra il 1861 e il 1868, fra cui i « Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie » e gli scritti del pari famosi sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, sulle rigate di quarto grado e sulla superficie di Steiner.

Il I vol. è ornato col ritratto dell'autore, il II con una fototipia del monumento eretto al Cremona nella R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri di Roma; la stampa è del tutto degna del grande geometra e della celebre Casa editrice.

G. L.

Storia.

Paul Tannery, *Mémoires scientifiques publiés par* J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen. *Sciences exactes dans l'Antiquité* 1883-1898, T. II. Toulouse-Paris, Privat-Gauthier Villars, 1912. 8° p. XII-554.

Fra gli articoli inseriti in questo secondo volume (riguardo al I si vegga questo *Bollettino,* XVI, 1915, p. 6-13) vi è (n. **57**) un breve saggio intitolato Geometria, scritto per il « Dictionnaire des antiquités grecques et romaines » (T. IV, 1895), al termine del quale si legge una nota interessante, estratta da una lettera scritta in quell'epoca da Tannery a proposito di detto

Digitized by Google

articolo. In tale nota Tannery dichiara che lo scrivere articoli di detta specie gli riuscì sempre penoso perchè essi porgono poca o punta opportunità per " la liberté de composition et des développements que je considère comme indispensables à tout travail original ". In queste frasi sta la chiave di tutta l'opera del Tannery. Ad esempio egli non avrebbe scelto di scrivere una storia metodica della geometria greca, perchè ciò avrebbe rese necessarie molte semplici ripetizioni di cose già note, mentre ciò che lo interessava specialmente era l'investigazione di questioni speciali non sufficentemente esplorate o mai discusse. Più difficile era la questione e più egli vi si attaccava. Ove la dimostrazione risultava imperfetta, per esserne sparsi e contraddittori gli elementi, egli applicava il giudizio più acuto, e l'essere egli, per così dire, tuffato nel modo di vedere e nel modo di pensare dei Greci lo guidava a interpretazioni sicure, in perfetto accordo con lo spirito greco.

Nel presente volume, quanto nel primo, noi siamo colpiti dalla straordinaria varietà di temi speciali trattati in trentasei differenti articoli e dalle cognizioni enciclopediche ivi dimostrate riguardo a tutte le fonti originali di notizie, a testi, commenti, scoli e frammenti, di alcuni dei quali molti non avevamo nemmeno mai udito parlare. Oltre all'acutezza di giudizio e la fecondità di suggerimenti che caratterizzano tutta la sua produzione, noi non possiamo non ammirare la prodigiosa diligenza del nostro autore. Per esempio in questo volume molte cose sono spinte sino ai loro particolari più minuti, che hanno un valore intrinseco modesto, come l'astronomia d'osservazione incorporata in vari *parapegmata*: molte cose di tal fatta si trovano negli articoli (**42**) sopra Autolico da Pitane e (**49**) sull'arte d'Eudosso. Dello stesso genere è la memoria (**46**) sopra " La grande année d'Aristarque de Samos ", ove, oltre ad una brillante correzione e spiegazione del resoconto dato da Censorino intorno al grande anno di Aristarco, troviamo dei calcoli eseguiti accuratamente relativi a tutti gli altri grandi anni e cicli che s'incontrano nell'astronomia greca. A questo proposito l'iscrizione frammentaria di Keskinto, che risale ad un'epoca che oscilla fra il 150 ed il 50 a. C., con tutte le difficoltà insite nella sua interpretazione, porge occasione per investigazioni minutissime che occupano tre articoli (**58-60**) e trenta pagine.

La prima memoria del presente volume (**30**) è un eccellente studio " Pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans

Digitized by Google

l'antiquité „, il quale tratta della storia di curve speciali divenute famose ed anche dei passi in cui Proclo (ossia Gemino), Erone e Pappo proposero varie classificazioni delle curve e delle superficie. Tannery comincia con la " quadratrice „ di Ippia, dimostrando che non vi è ragione per dubitare che l'Ippia in questione sia Ippia d'Elea (l'unica prova trascurata sembra essere quella data dal dialogo di Platone ove sono citate le attitudini matematiche d'Ippia) ed esprimendo la fondata opinione che lo scopo che aveva in origine la quadratrice fosse la trisezione d'un angolo qualunque, non la quadratura (o meglio la rettificazione) del cerchio, cioè le applicazioni della curva fatte poi da Dinostrato, Nicomede ed altri. Interpretando un passo di Simplicio nel senso che Nicomede eseguì la quadratura " mediante la curva propriamente chiamata quadratrice ed Apollonio mediante una curva da lui chiamata sorella della cocloide „ (concoide di Nicomede), Tannery conclude che la curva usata da Nicomede non fosse altro che la stessa quadratrice e che Apollonio la investigasse ulteriormente prolungandola fuori del cerchio generatore e dimostrando che possiede un asintoto. Altre curve speciali su cui viene proiettata molta luce sono le spiriche di Perseo, che si dimostrano essere in numero di otto (" tre curve oltre a cinque sezioni „, secondo la locuzione d'un noto epigramma), le quattro varie concoidi menzionate da Pappo e da ultimo la cissoide di Diocle. Tannery tenta anche d'indovinare la natura della curva " paradossale „ di Menelao menzionata da Pappo; egli suppone che sia una particolare ippopeda, cioè l'intersezione di una sfera con un cilindro tangente ad essa internamente ed avente il proprio diametro eguale al raggio della sfera; ma qui si tratta d'una pura ipotesi. Tannery asserisce poi essere difficile di evitare la conclusione che " la curva a doppio movimento „, che Pappo attribuisce a Carpo d'Antiochia, sia una cicloide: ma noi, per parte nostra, non possiamo a meno di nutrire gravi dubbi al riguardo. Però tali dubbi nulla tolgono al valore permanente della memoria in questione.

Nella seguente memoria (**31**) " Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide „ troviamo ragioni ancora maggiori per discutere. A ragione Tannery ammette che le definizioni sono genuine e che i difetti nel contenuto e nell'ordinamento provengono in gran parte da trattati anteriori a cui Euclide non apportò le necessarie modificazioni, in conseguenza del suo rispetto per le tradizioni. Egli sostiene, pure con ragione, che i tre primi postulati sono

Digitized by Google

originali; ma egli aggiunge che soltanto questi tre sono genuini mentre quelli numerati 4 e 5, come pure gli assiomi (o nozioni comuni), sono interpolazioni posteriori. In ciò, secondo me, Tannery andò contro l'evidenza. I postulati 4 e 5 sono riconosciuti da Gemino per proprietà di Euclide, quantunque egli discutesse intorno all'opportunità di riguardarli come postulàti, ben vedendo che sono evidentemente piuttosto proprietà suscettibili di dimostrazione. L'argomentazione di Tannery consiste in ciò che il postulato 4 è in realtà superfluo, essendo incluso nella definizione d'angolo retto, e che il postulato 5 non si trova al suo posto perché starebbe meglio connesso alla proposizione 17, e alla 28, di cui è reciproco, e non se ne ha bisogno che nella proposizione 29. Certamente Euclide avrà, come pensa Tannery, tentate tutte le strade possibili per giungere alla dimostrazione del postulato; ma dopo avere provato (e Euclide deve averlo certamente provato) che una dimostrazione è impossibile, è difficile di ammettere fosse più glorioso, come sostiene Tannery, di limitare i postulati ai tre di costruzione. A noi al contrario sembra maggiore gloria l'avere ravvisata l'impossibilità di dimostrare il postulato e l'averlo coraggiosamente assunto come tale; occorreva del coraggio e soltanto uno dei geometri massimi avrebbe osato di farlo. Rifiutando di accogliere tutti gli assiomi Tannery va contro autorità antiche, perchè ne ammise cinque lo stesso Proclo. Di più noi sappiamo che Apollonio tentò di provare gli assiomi; onde la conclusione naturale che si deduce da tutto questo è, non che nessuno li avesse immaginati prima dell'epoca apolloniana, come opina Tannery, ma che Apollonio li trovò in Euclide e sostenne che a torto questi li riguardò per postulati e quindi li accettò senza prova alcuna; tale attitudine deve considerarsi assieme ad altre critiche che, come è noto, egli fece ad altri punti degli " Elementi ".

L'articolo successivo (32) tratta dei mss. di Diofanto esistenti a Parigi, mentre quelli conservati a Roma ed a Madrid sono descritti negli articoli 44 e 50, il primo dei quali dà notizia eziandio di altri mss. studiati durante un viaggio fatto in Italia nel 1886, i quali si riferiscono a commenti di Nicomaco, all'Ottica di Damiano, e alle lettere matematiche di Rabdas, ecc. La memoria 33 concerne " La perte des sept livres de Diophante "; ivi Tannery adduce ragioni convincenti per ritenere che la perdita ebbe luogo alla fine, cioè nei libri più difficili che non di-

Digitized by Google

vennero popolari e largamente conosciuti mediante commenti, come quelli di Ipazia. Non posso però non ritenere che egli si trovi dalla parte del torto nelle sue vedute riguardo ai " Porismi " che Diofanto cita con le parole " nei Porismi noi abbiamo.... ". Tannery sostiene che essi si trovavano intercalati come corollari in vari punti dell'" Aritmetica " stessa. Ora ciò sembra impossibile perchè in tal caso Diofanto non ne avrebbe parlato collettivamente col nome di " I Porismi " ; preferisco ritenere, con altri autori, che questi costituivano un'opera a sè.

Nell'articolo **34** (" Sur la langue mathématique de Platon ") Tannery discute, in primo luogo, la questione in qual misura i termini tecnici di matematica furono fissati dall'epoca di Platone con speciale riguardo al celebre passo del " Teeteto " (147 D) sugli irrazionali. Qui egli ci sembra meno felice del solito. Egli osserva con piena ragione che le parole *promechi* ed *eteromechi* sono usate indifferentemente per designare la stessa cosa (cioè i numeri " oblonghi ") e che *μῆκος* (contrapposto di *δύναμις*), che è applicato soltanto ad una lunghezza commensurabile, non divenne mai un'espressione classica in quel senso ; tuttavia, siccome *δύναμις*, usato quì per irrazionale, *radice quadrata* di un numero non quadrato di piedi quadrati, non è usata nel senso adoperato nella *Repubblica*, ove significa quadrato, ne conclude che la lettura non può essere esatta e dovrebbe in tutto il passo venire mutato in *δυναμένη*. Ora questo mutamento non ci sembra necessario e produce più difficoltà di quante ne tolga ; lo stesso Tannery vide la difficoltà nelle parole nel genitivo *τῆς τε τριπλοῦς πρὸς καὶ πεντάπλους*, che vengono subito dopo ; tali parole concordano perfettamente con *δυνάμεων* secondo la lettura del testo, ma non con il proposto *δυναμένη* che dovrebbe reggere un accusativo. La seconda parte della stessa memoria, che tratta del significato di *ἐπίτριτος πυθμήν* nell'VIII libro della *Repubblica* (546 C), è poi assai importante per nuove autorità citate sull'argomento (in particolare Massimo Planude).

Domnino da Larissa forma il soggetto della memoria seguente (**35**) ; il manuale d'aritmetica di Domnino è molto importante come attestazione d'un tentativo di reazione contro l'*Introductio arithmetica* di Nicomaco ed un ritorno alla tradizione euclidea. Tannery coglie l'occasione che gli si offre per chiarire buon numero di punti di dettaglio della storia dell'aritmetica greca ed esporre i punti deboli dell'aritmetica di Nicomaco e di Giam-

Digitized by Google

blico, che furono filosofi piuttosto che matematici. Il n. **40** contiene alcune note critiche sopra Domnino. Nel **36** (" Eutocius et ses contemporains ") fa conoscere le ragioni per le quali egli ritiene che Eutocio abbia vissuto prima di quanto ordinariamente si crede; invece di essere un discepolo di Isidoro da Mileto, egli fu probabilmente un contemporaneo un po' più vecchio di Antemio che egli chiama " mio caro collega "; egli ha anche dedicati alcuni commenti ad Ammonio, che probabilmente non viveva più dopo il 510 dell'E. v. Eutocio nacque, quindi, intorno al 480. La citazione di Isidoro da Mileto " nostro maestro ", il quale avrebbe riveduta l'edizione dei commenti di Eutocio ad alcune opere d'Archimede, si spiega come dovuta ad un allievo di Isidoro che avrebbe fatta una nuova edizione di Eutocio, e la citazione di " Isidoro nostro maestro " come inventore di un διαβήτης per descrivere la parabola si spiega come un'interpolazione della stessa mano.

Il n. **37** (" Questions Héroniennes ") si apre con una discussione del metodo egiziano per rappresentare una frazione come somma di summultipli decrescenti dell'unità, e delle considerazioni sull'ampio uso che i Greci fecero di tale sistema; il resto dell'articolo dà una nuova indagine assai particolareggiata intorno alle radici quadrate approssimate che s'incontrano in Erone; sarebbe desiderabile che tutto questo articolo ed altri sopra analoghi soggetti fossero nuovamente esaminati alla luce dei *Metrica* di recente scoperti. È notevole che Tannery antecipò tale scoperta, per quanto concerne la formola di Erone per trovare valori sempre più approssimati delle radici quadrate, trovando un frammento dei *Metrica*, che contiene quella formola, fra alcuni Prolegomeni inediti della *Sintassi* di Tolomeo esistenti nel ms. greco 2390 della Nazionale di Parigi (articoli **53** e **54**).

Come memorie di interesse e considerevole e generale possiamo citare i nn. **38** (" Sur l'arithmétique Pythagoricienne "), **52** (" Sur les épigrammes arithmétiques de l'Anthologie Palatine "). e **55** (" Sur Théon de Smyrne "). Altri articoli concernono Diofanto; l'uno (**47**, p. 267-399) è di lunghezza notevole (" Etudes sur Diophante "), e tratta la classificazione dei problemi risolti da Diofanto e dei metodi da lui adoperati, i quali sono esposti in termini generali invece che col mezzo dei numeri speciali usati nei problemi stessi; il tutto costituisce un utile accompagnamento all'opera di Diofanto, benchè riesca difficile seguirlo ed apprezzarlo senz'aver sott'occhio l'opera originale.

Digitized by Google

Altri due articoli 39. 64 si riferiscono ad alcuni passi del l'edizione di Erone fatta dall'Hultsch: il primo spiega un frammento oscurissimo dichiarato dall'Hultsch come « locus desperatus » p. 195. Tannery ritorna una nuova volta (48) all'ipotesi geometrica del Menone di Platone 86A-87B; in tale lavoro egli si dichiara partigiano dell'interpretazione del Benecke, considerando che Platone intende esprimere l'equivalente geometrico dell'equazione $b^2 = 2ax - x^2$, che però, secondo l'interpretazione del Benecke, si riduce alla constatazione abbastanza futile che $a^2 = 2a.a - a^2$; ma anche qui mi sembra che Tannery non abbia raggiunto lo scopo; Platone non dice che la figura di cui il rettangolo costruito è deficente sia un quadrato essendo simile ad un dato quadrato, ma un rettangolo simile allo stesso rettangolo applicato, che darebbe, se x (misurato lungo il diametro $2a$) ed y sono i lati del rettangolo, $x : y = y : 2a - x$, mentre xy è un'area data ($= b^2$). D'altronde l'interpretazione (63) di ἴσον in Euclide (I, Def. 4) è pienamente accettabile: è precisamente quella suggerita da chi scrive prima di conoscere l'articolo del Tannery e porta a ciò che la definizione di Euclide era semplicemente un tentativo per esprimere in forma popolare il contenuto della definizione di Platone (« quella linea di cui gli estremi ricoprono la parte mediana ») senza ricorrere alla vista.

Nella memoria 43 (« La coudée astronomique ») Tannery esamina le origini della divisione della circonferenza in 360 parti. S'intende che egli sia in possesso di ottime ragioni in appoggio alle sue conclusioni, che sono: I Caldei dividevano lo Zodiaco ma non l'equatore e gli altri cerchi astronomici) in 360 parti; a ciò erano giunti dividendo il *segno* (dodicesima parte del cerchio), che era notoriamente la divisione di partenza. Le inscrizioni cuneiformi attestano due specie di divisioni del segno, una in trenta e l'altra in sessanta parti eguali. La seconda accordandosi meglio col sistema sessagesimale si presenta più naturalmente e darebbe il cerchio diviso in 720 parti; ma la prima presentava il vantaggio di condurre ad un numero di parti (360) approssimativamente eguale al numero dei giorni dell'anno. Il diametro veniva generalmente diviso in *aune* (coudées), ognuna di 2°, ciò che dava 180 parti nel cerchio. A ciò si arrivò forse così; diviso il diametro al solito in 60 parti, la circonferenza, essendo approssimativamente eguale a tre diametri, risultava divisa in 180. In Grecia la divisione in 180 parti è di più antica data di quella in 360; questa, nella

Digitized by Google

sua applicazione a circoli qualunque, è in realtà dovuta ad Ipparco e coincide con l'invenzione della trigonometria. Una memoria congenere (**61**: " Sur les subdivisions de l'heure dans l'antiquité „) è essa pure del massimo interesse; essa è seguita da una (**62**) " Sur la religion des derniers mathématiciens de l'antiquité „.

Aggiungeremo un'osservazione per rendere cauti i lettori. Le memorie ristampate nel presente volume essendo state scritte negli anni 1883-1898, è naturale che dei mutamenti nei modi di vedere si avvertano fra le prime e le ultime. Così in quella che porta il n. **30** Tannery giunge alla conclusione (p. 28) che le cosidette definizioni di Erone non sono genuine essendo posteriori a Posidonio, Erone essendo allora (1883) ritenuto contemporaneo di Posidonio; ma ora l'opinione più accreditata è che quelle definizioni appartengano in realtà ad Erone; e Tannery abbandonò l'argomentazione su cui posava il contrario avviso, ammettendo che, come risultava dalle investigazioni più recenti, Erone sia vissuto verso il termine del II Secolo dell'èra nostra (**55**, p. 456 nota, e **57**, p. 479). Sarebbe stato opportuno che gli editori avessero fatto dei richiami per collegare fra loro siffatti passaggi.

È con viva impazienza che noi attendiamo il prossimo volume di questa preziosa raccolta.

T. L. Heath.

Wolfgang und Johann Bolyai *Geometrische Untersuchungen. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von* Paul Stäckel. I Teil: *Leben und Schriften der beiden Bolyai mit der Nachbildung einer Aufzeichnung Johann Bolyais und 26 Figuren im Text* (p. XII-281). II Teil: *Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai, mit 94 Figuren im Texte und einer Figurentafel* (p. 274). Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913 (Prezzo Mk. 28).

Chi segua la narrazione della vita mediocremente felice di Volfango e Giovanni Bolyai e la descrizione della varia fortuna che ebbero le loro opere è naturalmente tratto ad esclamare col poeta:

Giusta di gloria dispensiera è morte.

Infatti sino al 1856 il nome dei due sommi matematici ungheresi non era noto che ai pochi che vissero nei dintorni della piccola terra in cui si svolse la maggior parte della loro esi-

Digitized by Google

stenza; in quell'anno il nome del primo fu incidentalmente segnalato ai matematici da un professore di mineralogia e geologia all'Università di Gottinga, Sartorius von Walterhausen, il quale ne fece menzione nel ben noto suo *Elogio di Gauss*, perchè Volfango Bolyai ebbe col " princeps mathematicorum „ relazioni di amicizia e di studi. Tali relazioni venivano poco dopo (1860) confermate quando il Peters diede alla luce il carteggio di Gauss con Schumacher. Tuttavia non è ne al Walterhausen nè al Peters che si deve se l'attenzione dei matematici finì per fissarsi sopra le fondamentali ricerche geometriche dei due Bolyai ; tale merito spetta a R. Baltzer, il quale nella II edizione (1867) dei suoi eccellenti *Elementi di matematica* citò Lobatschewski e G. Bolyai a proposito del celebre postulato d'Euclide e delle ricerche su di esso istituite. Appunto da quegli *Elementi* e dalla corrispondenza epistolare col Baltzer J. Hoüel fu tratto ad occuparsi della storia della geometria elementare nel corso del secolo XIX ed in particolare dei Bolyai, con quell'amorosa cura e con quegli splendidi risultati che tutti conoscono. L'Hoüel, postosi in relazione con l'architetto ungherese Franz Schmidt, ottenne da lui una folla di preziose informazioni bibliografiche intorno ai Bolyai e lo indusse a scrivere per l'*Archivio di Grunert* il primo lavoro storico sopra la loro vita e la loro opera scientifica. Tale lavoro fu tosto tradotto liberamente in Italiano da A. Forti e pubblicato nel *Bullettino* del Principe Boncompagni. Così il velo di mistero che avvolgeva i due matematici transilvani era strappato e da quel momento il loro nome apparve, insieme a quello del Lobatschewski, in tutti gli scritti aventi qualche legame col postulato V di Euclide. Come conseguenza della postuma fama finalmente conseguita, nel 1879, sopra la facciata del Collegio di Maros-Vàsàrhely, nel quale per ben 52 anni aveva insegnato Bolyai padre, fu murata una lapide commemorativa e coi residui della somma all'uopo raccolta per pubblica sottoscrizione venne istituito un premio annuale intitolato a Bolyai e Gauss e destinato al miglior alunno di quel collegio; e cinque anni appresso per opera della Società fisico-matematica di Budapest veniva innalzata una piramide commemorativa sulla tomba di Giovanni Bolyai. Contemporaneamente si manifestava sempre più intenso il desiderio e più insistente la domanda di nuove notizie sopra la loro vita e le loro opere; per ciò nel 1887 l'Accademia Ungherese delle Scienze deliberava la ristampa del famoso *Tentamen* di Volfango Bolyai; ed infatti nel 1897

Digitized by Google

ne uscì in edizione splendida il I Volume e nel 1904 il II. Nel 1898 il succitato Schmidt pubblicava una particolareggiata biografia di Giovanni, rimandando a miglior tempo la pubblicazione di un lavoro analogo sul padre, del quale da tempo adunava i materiali; l'anno seguente vedeva la luce un magnifico volume contenente il carteggio fra Gauss e V. Bolyai; e nel 1902 l'Accademia Ungherese deliberava l'istituzione di un vistoso premio quinquennale col nome di Bolyai, destinato agli autori di eminenti scoperte matematiche.

Nel frattempo un grande numero di ricerche venivano fatte in Ungheria per colmare le lacune che tuttora presentava il quadro dell'opera scientifica dei due Bolyai, specialmente per opera di P. Stäckel, di cui i nostri lettori conoscono indubbiamente le fondamentali pubblicazioni sopra il tema che ci occupa. Tali lavori sono riassunti, coordinati e completati nell'opera importantissima che oggi segnaliamo ai nostri lettori. Essa rappresenta il secondo elemento della collezione intitolata *Urkunden der nichteuklidischen Geometrie* diretta dallo Stäckel stesso e dall'Engel. Questi, come i nostri lettori ricordano (v. *Bollettino* T. II, 1899, p. 116), raccolse molti documenti interessanti relativi a Lobatschewski, lo Stäckel fa ora altrettanto riguardo ai Bolyai nei due volumi che ci giungono ora sott'occhio.

Notiamo subito che essi formano un tutto organico: giacchè, mentre il II consta tutto di documenti, questi non mancano totalmente nemmeno nel I, benchè siano di mole e d'importanza minori; d'altronde il significato degli scritti pubblicati nel II Vol. non si può misurare da chi non abbia presa cognizione di quanto contiene il I.

Questo si ripartisce naturalmente in due parti; una, che abbraccia i primi sei Capitoli, è dedicata a Volfango Bolyai; l'altra, che comprende i seguenti tredici Capitoli, tratta di Giovanni e delle sue relazioni col proprio padre; l'ultimo Cap. dell'opera, a guisa di epilogo, dà particolareggiate notizie sopra la storia delle loro opere.

Tracciata a grandi linee la genealogia della famiglia a cui appartennero i due grandi matematici (Cap. I), lo Stäckel segue (Cap. II) il più anziano di essi nel viaggio che egli fece in Germania, dilungandosi con ragione intorno ai suoi rapporti con Gauss; fatto poi cenno (Cap. III) delle sue occupazioni al ritorno in patria, ne delinea esattamente (Cap. IV) l'opera come inse-

Digitized by Google

guante nel collegio di Maros-Vàsàrhely e poi ne esamina (Cap. V e VI) con larghezza e profondità le idee matematiche, specialmente in base al *Tentamen*.

Passando ad occuparsi del figlio, lo Stäckel ne descrive l'irrequieta infanzia e la promettente giovinezza (Cap. VII), lo segue nel Collegio militare di Vienna (Cap. VIII), ove studiò con esemplare diligenza dando prova di straordinario ingegno, e poi nell'esercito austriaco, ove egli servì in qualità di ufficiale del genio (Cap. IX). Negli importantissimi Capitoli X-XI lo Stäckel rivela la strada battuta dal suo eroe per giungere alla scoperta della geometria assoluta. Riprendendo poi la narrazione della vita di Bolyai figlio, ne narra (Cap. XIII) la vita nel corso negli anni 1834-46, per dare poi notizia (Cap. XIV) delle ulteriori sue indagini sopra la geometria assoluta e delle ricerche (Cap. XV) istituite dal padre e dal figlio sopra la teoria degli immaginari, nell'intento di rispondere ad un tema posto a concorso dalla Società Jablonowski. Della più alta importanza sono i Capitoli XV-XVI giacchè danno informazioni esaurienti intorno alle osservazioni fatte da Giovanni Bolyai sopra le *Geometrische Untersuchungen* del Lobatschewski ed alle nuove investigazioni a cui egli fu indotto da tale lettura. Nel Cap. XVII è descritta la vita che egli condusse negli ultimi dodici anni della sua esistenza quando, per ragioni di salute, fu costretto ad abbandonare il servizio militare. E nel cap. XVIII vengono fatti conoscere gli studi matematici ai quali in allora egli si consacrò: sono studi che a nulla condussero perchè a nulla potevano approdare, giacchè egli si propose problemi al certo bellissimi, ma alcuni insolubili, altri ancora irresoluti, quali i seguenti: Risoluzione algebrica di tutte le equazioni; Integrazione sotto forma finita di ogni specie di differenziali; Sommazione in termini finiti di qualsivoglia serie; Quadratura del cerchio; Espressione generale di tutti i numeri primi; Risoluzione completa razionale di qualunque equazione finita o di qualunque sistema di equazioni; Dimostrazione dell'XI assioma di Euclide (è da notarsi che al termine della sua vita il Bolyai aveva perduta ogni fede nella geometria assoluta da lui creata); Dimostrazione dell'eguaglianza in termini finiti di tutti i poliedri equivalenti. Nel penultimo Capitolo lo Stäckel espone la quintessenza dell'«Allheilehre», nuovo sistema di morale o meglio nuova religione, concepita dal Bolyai nell'ultima fase della sua travagliata esistenza, del quale egli lasciò, sotto varie forme, un semplice schizzo, che, secondo le sue intenzioni,

Digitized by Google

doveva venire completato e colorito da quello fra i suoi posteri che ne fosse degno e capace: al dire dello Stäckel quest'araba fenice non fu ancora trovata!

Da questo scheletrico riassunto il lettore dedurrà senza fatica come lo Stäckel abbia nella sua opera contemplati i due Bolyai da tutti i più importanti punti di vista; ma ciò che non risulta dalle nostre parole è l'arte sopraffina e la scienza profonda che egli ha spiegato, alternando abilmente le considerazioni atte ad illuminare la psiche veramente straordinaria di quegli uomini eminenti, con quelle di natura esclusivamente dottrinale. Sicchè, mentre nella lettura dell'opera del dotto professore dell'Università di Heidelberg si procede con grande diletto e senza incontrare alcuna seria difficoltà, al termine di essa ci si avvede di avere apprese molte cose importanti, chiariti molti punti oscuri e banditi dalla propria mente molti dati erronei. Ora che cosa si potrebbe dire di più per raccomandare una pubblicazione all'attenzione degli studiosi?....

G. L.

Matematica per i Licei Moderni.

Ugo Amaldi e Federigo Enriques: *Nozioni di Matematica ad uso dei Licei moderni*, volume primo. N. Zanichelli, Bologna (senza data). (Prezzo L. 4).

Istituito, dopo lungo discutere, quel tipo di scuola che si è chiamato *liceo moderno* e che dovrebbe meglio corrispondere alle svariate e incalzanti esigenze dei nostri giorni, specialmente addicendosi a quelli che intendono avviarsi agli studi scientifici, — è questo il primo anno di vita per la seconda classe della nuova sezione liceale: e poichè appunto di qui si differenziano i programmi per l'insegnamento della matematica, così è il caso di vedere se e come raggiungano il loro scopo quelle non molte opere appositamente venute in luce in questi ultimi mesi.

È evidente che i compilatori di quei programmi si sono proposti di non contenere l'insegnamento matematico secondario nei limiti di una pura esercitazione intellettuale, ma di mostrare come tale disciplina abbia oltre che intrinsecamente, un grandissimo valore concreto in quanto accresce potenza all'indagine nei più svariati campi della scienza. Come dunque sarebbe male che i giovani non apprendessero a valersi di un tanto poderoso strumento, così è nobile il fine cui s'inspirano i nuovi programmi; i quali

Digitized by Google

ben degno e adeguato sviluppo ricevono nell'opera che i proff. AMALDI ed ENRIQUES propongono alle nostre scuole.

E difatti: chiarezza, rapidità, eleganza, esemplificazione appropriata e abbondante, sincerità scientifica che si manifesta in un perfetto rigore logico o in un esplicito ricorso all'intuizione, continui richiami ai più semplici problemi pratici che si connettono alle varie teorie svolte, dovizia e varietà di esercitazioni — ecco i pregi che più adornano il libro. A questi si aggiunga che gli svolgimenti d'Algebra e di Geometria si compenetrano in modo che i reciproci contatti ne sono lumeggiati, e ciò opportunamente addestra i giovani all'astrazione e alla sintesi. Tutto il volume comprende X capitoli, un'appendice ed una copiosa e ben scelta serie di esercizî.

I) *Misure approssimate e numeri irrazionali.* — Gli AA. mostrano come le misurazioni di grandezze concrete conducano generalmente a risultati approssimativi, e si soffermano quindi a risolvere i più elementari problemi della teoria degli errori; dopo di che procedono alla definizione dei numeri irrazionali, considerandoli, secondo WEIERSTRASS, come numeri decimali illimitati e non periodici ottenuti per misura dei segmenti incommensurabili con l'unità. Le operazioni sui numeri reali positivi vengono definite mediante operazioni sui segmenti, ciò che consente la massima concisione e speditezza; e qualora si obbiettasse che la teoria così svolta non è puramente aritmetica, si potrebbe replicare che ciò non disdice ad un insegnamento diretto a pratiche finalità, perchè è appunto dalla Geometria che si possono far sorgere i primi problemi richiedenti la nozione di numero irrazionale.

II) *Aree piane: poligoni e cerchi.* — Eseguita, come di solito, la misurazione del rettangolo, degli altri poligoni e delle superficie poliedriche, viene elegantemente interpretata per via geometrica la relazione che intercede fra il limite di approssimazione dei fattori e quello del prodotto, ciò che giova ad illustrare alcuni risultati del primo capitolo. Gli AA. passano poi a definire e a determinare la lunghezza di una circonferenza e dopo ciò facilmente ottengono l'area del cerchio.

In questo capitolo, ed anche in altri che seguono (VII, VIII), è notevole l'indirizzo, che si potrebbe dire metrico, dato alle varie considerazioni: i problemi geometrici puri di rettificazione della circonferenza e di quadratura del cerchio cedono senz'altro il posto ai corrispondenti problemi metrici, come quelli che più spesso occorrono nella pratica.

Digitized by Google

III) *Problemi geometrici di 1⁰ e 2⁰ grado. Radici quadrate.*

IV) *Equazioni di secondo grado.*

V) *Radici d'indice qualsiasi e calcolo dei radicali.*

Questi tre capitoli sono strettamente connessi fra loro poichè il primo, contenendo il problema di ricerca del segmento medio proporzionale fra due dati, che equivale ad una estrazione di radice quadrata, dà occasione a studiare nel capitolo seguente l'equazione generale di 2⁰ grado, e nell'ultimo le radici di indice qualunque.

In base alla teoria della misura, è dimostrato come l'Algebra possa sistematicamente applicarsi allo studio di questioni geometriche: sono dapprima geometricamente interpretate alcune semplici identità algebriche e vengono quindi esaminati dallo stesso punto di vista i problemi di primo grado e di secondo grado puri, che equivalgono alla costruzione di un quarto o di un medio proporzionale.

Il Capitolo III si chiude con la costruzione di SPECHT per la rettificazione approssimata e con altra per la quadratura approssimata del cerchio.

I Capitoli IV e V sono trattati nel modo consueto, con l'aggiunta della risoluzione grafica dell'equazione di 2⁰ grado e non danno luogo a rilievi speciali: mi sia tuttavia permesso di indicare due lievi omissioni: mi pare, a proposito dell'equazione di 2⁰ grado, che sarebbe stato conveniente far cenno anche del tipo di equazione $a x^2 + 2 b x + c = 0$, la cui formula risolutiva è di ben più frequente applicazione che non quella corrispondente al tipo $x^2 + p x + q = 0$; e relativamente ai radicali mi sarebbe piaciuto vedere indicata nel testo la frequente operazione di estrazione di un fattore razionale da un radicale, non soltanto quando l'esponente di un fattore del radicando sia uguale, ma anche quando sia maggiore dell'indice di radice.

VI) *Prismi e cilindri.* — Stabilita la nozione di poliedri equivalenti ed applicatala ai prismi in particolare, gli AA. procedono immediatamente alla misurazione dei prismi e dei cilindri. L'area della superficie laterale del cilindro è, per definizione, quella del rettangolo sviluppo della superficie stessa sul piano.

VII) *Piramidi e coni.*

VIII) *Sfera.*

Sono questi due dei capitoli contenenti le più notevoli innovazioni rispetto ai metodi già consacrati da una lunga consuetudine nelle scuole italiane. I volumi della piramide, del cono e

Digitized by Google

della sfera vi sono determinati secondo la via sostanzialmente tracciata da ARCHIMEDE, mediante vere integrazioni dirette.

Dalla considerazione degli scaloidi inscritto e circoscritto ad un tetraedro, relativi alla divisione dell'altezza in n parti uguali, e utilizzando la formula che dà la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, si perviene facilmente a trovare per il volume V del tetraedro la limitazione

$$\frac{S\,h}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2\,n}\right) < V < \frac{S\,h}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2\,n}\right)$$

donde, notato che per n conveniente i prodotti che moltiplicano $\frac{S\,h}{3}$ possono differire dall'unità per quanto poco si voglia, risulta senz'altro l'espressione del volume del tetraedro.

Il procedimento è analogo per il cono e per la sfera e si rivela subito di una grande fecondità e generalità; ma perchè non renderlo più convincente col metterlo a prova nella determinazione di un'area o di un volume già noti, p. es. dell'area di un triangolo o del volume di un prisma triangolare disposto ad aver per base una faccia laterale? Dalla coincidenza dei risultati in questi casi, lo studente acquisterebbe fiducia nella legittimità del nuovo metodo che egli apprende, e lo applicherebbe più speditamente al tetraedro, al cono e alla sfera; tanto più che i risultati ottenuti vengono poi estesi alla piramide qualunque, al tronco di piramide e di cono, al settore ed al segmento sferico (e perchè non anche allo spicchio sferico?).

L'area della superficie conica è definita mediante lo sviluppo piano della superficie stessa in un settore circolare. Più ancora merita di essere notata la definizione d'area della superficie sferica: rilevato che una tale superficie non è sviluppabile, ed assimilatala approssimativamente alla superficie di un poliedro con minutissime faccie, segue che il volume di un tale poliedro, non differente sensibilmente da quello della sfera, sarà dato da un terzo del prodotto del raggio per l'area della superficie sferica. Ed allora sarà naturale assumere come valore di quest'area il numero che moltiplicato per un terzo del raggio dia il già noto volume della stessa sfera. Non si può certo dire che il procedimento sia molto soddisfacente dal lato logico, ma esso è in perfetto accordo con l'intuizione, alla quale appunto gli AA. si riferiscono, e come tale pienamente accettabile nella scuola per la quale si propone. E del resto, chi vorrà appagare lo spirito con conside-

Digitized by Google

razioni meglio nutrite di rigore logico, potrà valersi dei soliti modi di trattazione che sono accennati in fine a ciascuno dei due capitoli esaminati: tali addizioni, pur non rientrando nel piano dell'opera, serviranno in ogni caso ad opportuni raffronti fra l'indirizzo metrico, che offre il vantaggio di molta correntezza e uniformità, e quello geometrico puro tradizionale.

IX) *Solidi simili.* — Le relazioni fra le aree e i volumi dei solidi simili e le loro dimensioni lineari corrispondenti sono rapidamente stabilite mediante le formule pel calcolo delle aree e dei volumi.

X) *Funzioni e diagrammi.* — Come gli AA. avvertono, tale capitolo costituisce la parte essenzialmente nuova del programma esposto in questo primo volume, ed è principalmente dedicato alla rappresentazione grafica delle più semplici funzioni di una variabile, empiriche e matematiche, al fine di fare constatare visibilmente le loro più elementari proprietà. Non dunque una succinta esposizione di Geometria analitica; ma la trama sulla quale s'intesse questa parte del lavoro è il sistematico impiego delle coordinate cartesiane nel piano, come mezzo appropriato ad illustrare l'andamento di una funzione.

Ad onore del vero, conviene qui dire che già altri autori di testi scolastici e molti insegnanti di scuole medie fecero cenno a tal genere di rappresentazioni anche prima che ciò fosse dalla legge prescritto (1); ma, fattane ora dai programmi esplicita menzione, è ben naturale che i principî cartesiani trovassero nel nuovo libro un più ampio sviluppo ed una più ricca esemplificazione. Ripreso il concetto di misura dei segmenti, gli AA. traggono i primi esempi di grafiche da fenomeni fisici, economici, demografici (temperature, solubilità, commercio internazionale dell'Italia, mortalità per difterite, etc.). Passano poi a rappresentare graficamente le funzioni di primo grado, a risolvere il problema d'interpolazione per una di tali funzioni e ad applicare queste rappresentazioni ai moti uniformi, agli orari grafici, alla risoluzione geometrica di un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite.

Dopo ciò studiano sotto l'aspetto grafico le funzioni di secondo grado, risolvono geometricamente le equazioni e discutono le di-

(1) Cfr. p. es. PINCHERLE, *Lezioni d'Algebra elementare* (Zanichelli, Bologna) dove il metodo delle coordinate è rigorosamente esposto e chiarito da molti esempi.

Digitized by Google

suguaglianze di secondo grado, illustrano il moto verticale dei gravi. Finalmente nell'ultimo paragrafo danno immagine della funzione $y = \frac{a}{x}$ e ne fanno applicazione alla legge di Boyle sui gas.

Tutto questo capitolo è sommamente interessante ed istruttivo: e mi pare che tale pregio sarebbe accresciuto se, interpretando un po' largamente il programma, si aggiungesse qualche nozione sulle coordinate polari, che pur vengono specialmente impiegate con profitto quando si vogliano rappresentare fenomeni dipendenti da una variabile periodica, p. es. fenomeni diurni, annuali, etc.

Appendice e problemi. — Sorvolando al brevissimo cenno sulle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio, non voglio passare sotto silenzio che un'ottima, copiosa e svariata raccolta di esercizi è posta a degno suggello dell'opera. Dire che essi sono bene scelti, interessanti, armonizzati quanto più è possibile con la prescrizione di esercitare gli alunni su questioni concrete e non artificiosamente ideate, è troppo poco finchè non si aggiunga che essi costituiscono un utilissimo e ordinato commento ai diversi capitoli del libro: qui sono date le necessarie indicazioni per lo svolgimento di importantissimi metodi e teorie complementari (errore relativo, grado di precisione, moltiplicazione e divisione abbreviate, calcolo di π, etc.), qui sono sparse molte e interessanti notizie storiche, qui infine sono proposti i più suggestivi problemi elementari della fisica, della geodesia, dell'astronomia, della cartografia, etc.

Riassumèndo, si può coscienziosamente affermare che i professori Amaldi ed Enriques hanno brillantemente superato la prova di comporre pel nuovo tipo di scuola un libro eccellente che già in questa prima edizione si presenta in forma quasi definitiva: nè tale merito è attenuato dalla esistenza di modelli congeneri che vanno per le scuole di altri paesi (Tannery, Gibson, etc.), poichè la loro opera è d'ispirazione e fattura schiettamente personale e italiana; e se un appunto può muoversi in proposito è forse quello di aver ricordato con il modesto titolo di "Nozioni di Matematica„ il citato testo francese — a meno che gli AA. non l'abbiano preferita a più pomposa denominazione onde rispecchiare il carattere dell'opera, che deve sintetizzare tanti metodi e teorie diverse —. Ma, passando oltre una questione di parola, sta il fatto che il nuovo libro sarà ugualmente utile a

Digitized by Google

insegnanti e a scolari, e piacevole a leggersi in quanto non è arida e uniforme sequela di definizioni e di teoremi ma armonico quadro nel quale bene evidenti sono i rapporti fra le diverse parti. Esso sarà consultato con profitto anche fuori ed oltre la scuola, e varrà sempre a soddisfare la legittima curiosità dei giovani, dai quali molto spesso sentiamo richiederci della pratica utilità di certi sviluppi teorici.

Attendiamo ora con vivo desiderio il secondo volume, che dovrà svolgere le più essenziali innovazioni prescritte dai programmi; e ci auguriamo che anche questo arrechi decoro alla Scienza e vantaggio alle Scuole d'Italia (1).

LUIGI GALVANI.

Geometria proiettiva

P. DEL PEZZO. *Principi di Geometria projettiva. Lezioni dettate nell' Università di Napoli,* 8°. III edizione, Napoli, 1913 (Prezzo L. 14.)

Non attribuisca il lettore a dimenticanza o negligenza da parte nostra il fatto che, accanto al titolo surriferito, non si trovi registrato il numero delle pagine di cui consta il volume del quale ci apprestiamo a render conto; gli è che riesce difficile dire quante sieno, mancando in tutto il volume ogni traccia di numerazione, sia per quanto concerne le singole pagine, sia riguardo ai fogli di stampa: se tale insolito sistema fu dall'A. adottato per eliminare ogni traccia di "numero" nell'esposizione di una disciplina puramente geometrica, altri dica. Una seconda ancora più essenziale caratteristica dell'opera in esame è il bando di ogni sorta di figure, che l'A. pronunciò seguendo l'esempio di un maestro grandissimo, lo Staudt; per conseguenza la Geometria projettiva si presenta in queste *Lezioni*, non come una preparazione immediata alla Geometria descrittiva ed alla Statica grafica, ma piuttosto come una propedeutica ad un corso universitario di Geometria superiore, nel dominio della quale, anzi, come vedremo, l'A. fa più d'una incursione. E siccome non abbiamo la pretesa di essere creduti sulla parola, esporremo in breve il contenuto del volume che ci sta sottocchio.

(1) Per le teorie non svolte nel testo gli AA. fanno richiamo alla loro *Geometria* ed alle già citate *Lezioni di Algebra elementare* del PINCHERLE.

Digitized by Google

Premesse alcune nozioni intorno alle sostituzioni ed alle operazioni che possono effettuarsi su di esse, l'A. raccoglie in un primo Cap. (intitolato *La geometria projettiva generale*) i concetti e le proposizioni che servono di fondamento alla geometria di posizione, attardandosi sulla corrispondenza projettiva delle forme di I, II e III specie, senza trascurare i casi particolari metrici che essa presenta. Del Cap. II (*La geometria proiettiva delle forme algebriche*) precipuo scopo è di stabilire il sistema di coordinate projettive sulla retta, nel piano e nello spazio e di svolgerne la teoria sino al punto da toccare il problema della trasformazione di tali coordinate; anche quì l'autore si arresta sui principali casi particolari metrici di dette coordinate; negli esercizi poi espone i teoremi essenziali della teoria delle coniche, li applica alla costruzione di tali curve ed ai problemi di secondo grado, facendo anche un cenno dei coni quàdrici e delle quàdriche rigate. Il III Cap. (*Lo spazio complesso*) contiene assai più di quanto promette il titolo: non soltanto l'autore vi stabilisce e svolge la teoria degli elementi immaginari in geometria, ma studia almeno alcune delle proprietà delle figure che si conservano passando da una figura ad una sua trasformata per projettività, e così è indotto a introdurre i concetti di " invarianti " e " covarianti " ed a segnalarne l'intervento nello studio delle collineazioni, dei gruppi di elementi in una forma di prima specie, nelle curve e nelle superficie algebriche. A questo punto egli spicca un superbo volo verso le varietà comunque estese, parlando di sistemi lineari di varietà, di polarità in generale e delle forme invariantive che portano i nomi di Jacobi, Hesse e Steiner; un cenno sulle curve razionali gli porge il destro di dare notizia del principio di corrispondenza di Chasles, di cui nei seguenti esercizi egli fa applicazione alla generazione mediante fasci delle curve algebriche ed alla dimostrazione di altri teoremi congeneri. L'ultimo Cap. è tutto consacrato alle coniche, definite (secondo Staudt) come curve unite di una polarità piana e studiate alternativamente con considerazioni puramente geometriche e col mezzo delle coordinate dianzi studiate; la teoria è spinta sino al punto da toccare i sistemi lineari di curve del second'ordine.

Da notarsi che qua e là l'autore ha introdotto alcune locuzioni nuove e che ci sembrano generalmente felici, onde sarebbe da augurarsi che i futuri espositori della materia, vincendo la

Digitized by Google

generale ripugnanza per i mutamenti nella nomenclatura in uso, le adottassero stabilmente.

La geometria projettiva, come ramo d'insegnamento, attraversa attualmente in Italia una crisi che ne pone in grave pericolo l'esistenza; chi ritiene che essa costituisca per i futuri ingegneri una preziosa ginnastica intellettuale e porga loro i mezzi per risolvere graficamente, invece che col calcolo, molti problemi suggeriti dalla pratica deve, non solo augurare che essa riesca a superarla, ma anche adoperarsi a che essa esca vittoriosa dal grave cimento a cui viene sottoposta. Ora noi temiamo che le presenti *Lezioni*, ove essa viene diretta verso orizzonti sempre più elevati e lontani da ogni pratica applicazione, non soltanto non serviranno a tale scopo, ma potranno persino venire adoperate da qualche mal intenzionato come arma omicida contro la disciplina a favore della quale vennero scritte. Possa questo sospetto venir smentito dai fatti, possa la ingiustificata opposizione contro una scienza importantissima venire definitivamente debellata; e così seguiti ininterrotta una tradizione che ha assicurato alla nostra terra un primato che gli stranieri non tentano nemmeno di contenderci. In tale voto speriamo di avere consenziente anche l'egregio professore dell'Ateneo napolitano!

G. L.

L'ultimo teorema di Fermat.

W. Lückhoff, *Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes*. Berlin-Wilmersdorf, Selbstverlag des Verfassers, 1913: 8° p. 4.

Nelle prime linee si incontra un grave errore. L'a. scrive l'equazione di Fermat per il grado λ così:

$$\left(x^{\frac{\lambda}{2}}\right)^2 + \left(y^{\frac{\lambda}{2}}\right)^2 = \left(z^{\frac{\lambda}{2}}\right)^2,$$

e ne trae la conseguenza che $x^{\frac{\lambda}{2}}$, $y^{\frac{\lambda}{2}}$, $z^{\frac{\lambda}{2}}$ debbono essere u numeri pitagorici n, cioè numeri interi soddisfacenti al teorema di Pitagora. Il resto della brevissima dimostrazione consta di semplici asserzioni, che non si vede su che cosa sieno fondate; nè crediamo, dopo l'osservazione fatta sopra, valga la pena di invitare l'A. a sviluppare maggiormente i suoi concetti, come egli si dichiara pronto a fare.

Digitized by Google

A. KEMPE, *Der grosse Fermatsche Satz. Versuch einer Beweisführung.* Amsterdam, Versluys, 1913: 8° p. 22.

Questa seconda edizione è completamente diversa dalla prima (sulla quale v.: *Boll.*, T. XIV, 1912, p. 85). La nuova dimostrazione si basa sulla decomposizione dei numeri, che dovrebbero soddisfare all'equazione di Fermat, in somme di potenze differenti di 2, e sul confronto dei termini d'esponente massimo e minimo nei due membri. A noi sembra possa comprendersi *a priori* che un tale confronto debba essere insufficiente a condurre ad una dimostrazione completa; l'esame dell'opuscolo conferma pienamente tale previsione. Un'analisi minuta di esso ci porterebbe troppo lontano; basterà accennare ad un punto solo. A p. 13, stabilita l'eguaglianza:

$$t - p = \frac{v - v_1}{n},$$

l'autore osserva che, per essere v e v_1 minori di n, dev'essere $t = p$, $v = v_1$; ma ne conclude stranamente, che la relazione trovata deve sussistere per qualunque n, e più strana è la motivazione « da v zu n, v_1 zu $n - 1$... gehören ». È facile, del resto; costruire esempi in contrario; così, posto $x = 43$, $z = 45$, quindi $t = p = 5$, si ha per $n = 13$, $v = v_1 = 5$, invece per $n = 23$, $v = 9$ e $v_1 = 10$. L'errore si ripete in più punti, e rende incompleta la dimostrazione. Ma anche i casi in cui essa è esatta sono semplicissimi, e si potrebbero esaurire a vista d'occhio, senza alcun calcolo.

E. LÖWENBERG, *Der grosse Fermat'sche Satz* $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$? *Ur-und Grundbeweis für seine Unmöglichkeit, gültig für alle Exponenten* $\lambda > 2$. Berlin, Schildberger, 1913: 8° p. 4.

La dimostrazione non potrebbe essere più semplice nè... più inconcludente. Poichè esistono terne di numeri interi x, y, z per cui:

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

e poichè l'equazione:

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda \tag{2}$$

per $\lambda > 2$ contiene (?) la (1), risulta chiaro che la (2) non può sussistere; giacchè, moltiplicando i termini della (1) rispettivamente per numeri ineguali $x^{\lambda-2}$, $y^{\lambda-2}$, $z^{\lambda-2}$, l'eguaglianza non può più aver luogo. G. VIVANTI

Digitized by Google

Rassegna di recenti dissertazioni di Laurea.

Amelia Zona, *Studio del metodo di Gylden per il calcolo delle perturbazioni dei pianeti.* Palermo, 1912.

Cap. I. Studio dell' equazione di Gylden. Cap. II. Studio del metodo di Gylden per il calcolo delle perturbazioni.

Cesare Coppedè. *Classificazione topologica delle superficie di Lamé algebriche.* Dissertazione di Laurea presentata all' Univ. di Genova. Firenze 1912.

Applicando i risultati ottenuti da G. Loria nella memoria « Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi algebriche », l'A. stabilisce la classificazione di tutte le superficie algebriche rappresentabili con un' equazione della forma

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

ove m è un numero razionale qualuuque. I risultati ottenuti potrebbero servire a costruire una serie completa di modelli delle superficie in discorso, la quale riuscirebbe assai interessante.

G. Spitz, *Zur Theorie der Elemente höherer Ordnung in der Ebene und im Raume.* Diss. Greifswald, 1912.

In questo lavoro sono completate e continuate ricerche di F. Engel e E. Study che risalgono agli anni 1893, 1901 e 1902; incidentalmente vengono rimosse alcune obbiezioni fatte da M. Nöther alla seconda memoria dell'Engel. Il contenuto del lavoro risulta dal seguente indice:

Cap. I. § 1. Introduzione. § 2. Teoria degli elementi nel piano degli ordini 1-5. - Cap. II. § 1. Osservazioni generali sulle collezioni di elementi nello spazio. § 2. Teoria degli elementi lineari nello spazio ordinario degli ordini 1-4. - Cap. III. § 1. Teoria degli elementi superficiali nello spazio. § 2. Gli elementi di terz' ordine di una curva e di un punto.

A. Kaiser, *Weiteres zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Diss. Greifswald, 1913.

Tresse, applicando i concetti ed i metodi di Lie, ha determinato tutti gli invarianti differenziali di un' equazione differenziale di second' ordine rispetto a tutte le trasformazioni puntuali.

Digitized by Google

L' A. suggerisce alcune modificazioni ai risultati ottenuti dal Tresse le quali offrono alcuni vantaggi nelle applicazioni.

A. Rauber, *Ueber die Lösung der Differentialgleichungen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben.* Diss. Univ. München, 1913.

Nella I^a Parte di questo lavoro sono indagate le equazioni differenziali di Eulero relative al movimento di un giroscopio a tre assi avente un punto fisso, applicando la teoria delle funzioni ellittiche jacobiane; nella II^a Parte viene studiato un sistema differenziale del terz'ordine incontrato nella I^a Parte.

Ernst Herrmann, *Über die einförmige Bewegung des ebenen kreisverwandt-veränderlichen Systems.* Diss. Technische Hochschule Dresden, 1913.

Applicazione di un metodo di M. Krause, convenientemente modificato, ai movimenti indicati nel titolo.

Rudolf Ackermann, *Böschungsstrahlen und Böschungsflächen.* Diss. Halle, 1913.

Applicazione delle formole della geometria differenziale all' investigazione delle superficie di egual pendenza; studio di alcuni casi speciali.

Friedrich Kurt, *Herleitung windschiefer Kegelschnitte durch die Bianchi' sche Transformation* B_k. Diss. Halle, 1913.

Lo scopo di questo lavoro è sufficientemente dichiarato dal titolo; le idee ed i metodi del nostro illustre connazionale trovano ivi vaste e notevoli applicazioni.

Eva Sachs, *De Theaeteto Atheniensi mathematico.* Diss. Berlin, 1914.

È un lavoro di natura filologica, fatto sotto la direzione del Diels e del Wilamowitz-Möllendorff, ove sono adunati e discorsi i passi di antichi scrittori relativi a Teeteto, il noto discepolo di Platone, tenendo conto dei risultati ottenuti al riguardo dalla critica contemporanea. Fra le conclusioni dell' autrice notiamo soltanto quella che Teeteto morì a Corinto nel 369 a. C., prima della pubblicazione del dialogo di Platone intitolato da lui.

Bernhard Albrecht, *Ueber das Problem der Brachistochrone der*

Digitized by Google

Zentralbewegung für das Anziehungsgesetz $K = m r^n$. Diss. Halle, 1914.

L'autore riprende il problema indicato dal titolo per applicarvi i metodi più recenti del calcolo delle variazioni; così aggiunge qualche cosa ai risultati conseguiti da Hâton de la Goupillière.

Rudolf Palm, *Zur Invariantentheorie eines Pfaffschen Ausdrucks.* Diss. Greifswald, 1914.

Nuova trattazione della questione di determinare le trasformazioni infinitesimali che lasciano invariante un'equazione di Pfaff, aumentandone il primo membro di un multiplo qualunque di un assegnato differenziale totale.

Otto Weber, *Binormalenflächen mit einer zur Striktionslinie äquidistanten Asymptotenlinie in Beziehung zu Evoluten Ribaucourscher Kurven.* Diss. Halle, 1914.

Ricerche sopra le curve gobbe tali che sulla corrispondente superficie delle normali principali si trovi una linea asintotica parallela alla linea di stringimento.

Rudolf Winkler, *Ueber die Bewegung affin-veränderlicher ebener Systeme.* Diss. Tech. Hochschule Dresden, 1914.

Applicazioni ed ulteriori sviluppi di un metodo di M. Krause per lo studio dei sistemi piani che si deformano conservandosi affini a sè stessi.

W. Gasiorowski, *Ueber die Definitionsgleichungen der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene.* Diss. Greifswald, 1914.

Robert Jentzsch, *Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen.* Diss. Berlin, 1914.

Cap. I. Il teorema di Vitali. Cap. 2. Sui segmenti delle serie di potenze. Cap. 3. Sopra le serie di funzioni analitiche.

G. L.

Notizie.

Nuovi modelli geometrici. La Casa M. Schilling ha iniziata la XLV Serie dei suoi modelli in filo con tre figure relative alla linea di stringimento dell'iperboloide ad una falda costruite dal

Digitized by Google

Prof. O. Danzer del Politecnico di Vienna. In uno la linea in questione ha per trisecanti rette che la segano ciascuna in *un solo* punto reale, mentre nell'altro le trisecanti la incontrano parte in *tre* e parte in *un* punto reale; il terzo caso si può considerare come di transizione tra i due primi. Ogni modello è posto in vendita al prezzo di 35 Marchi.

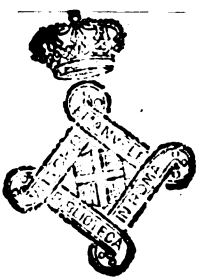
***

MATEMATICA E ARTIGLIERIA. La guerra scoppiata all' improvviso in Europa fa sentire la propria influenza in ogni campo, anche in quelli che sembrerebbero al riparo da ogni perturbazione mondana. Una riprova è offerta dal discorso con cui G. Greenhill inaugurò a Londra, addì 9 Gennaio 1915, l'annuale adunanza della « Mathematical Association ». L' illustre matematico, ricordandosi la sua antica posizione di professore in una grande scuola militare, parlò delle *Mathematics in artillery Science*, facendo un parallelo fra gli istituti congeneri di istruzione militare esistenti a Woolwich ed a Charlottenburg; nessun tedesco trovò mai argomenti altrettanto impressionanti per dare una spiegazione degli allori militari mietuti dall' esercito di Guglielmo II.

***

CONCORSI A PREMI. La R. Accademia di Napoli conferirà un premio di L. 500 alla migliore memoria sul tema: *Esporre le più recenti ricerche sulle curve algebriche con trasformazioni birazionali in sè, apportando ad esse qualche nuovo contributo relativo alla teoria generale o risolvendo qualche importante questione particolare.* Scadenza 30 Giugno 1916.

L' Accademia Pontaniana di Napoli ha proposto come tema pel Premio Tenore: *Esporre e possibilmente estendere le applicazioni delle equazioni integro-differenziali alla Meccanica e alla Fisica matematica.* Scadenza 31 Marzo 1916.



Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

La corréspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 81-86.
Opere complete e Enciclopedie (G. L). pag. 87-88,
Storia (T. L. Heath, G. L.) pag. 88-99.
Matematica per i Licei Moderni (Luigi Galvani) pag. 99-105.
Geometria projettiva (G. L.), pag. 105-107.
L'ultimo teorema di Fermat (G. Vivanti) pag. 107-108.
Rassegna di recenti dissertazioni di Laurea (G. L.) pag. 109-111.
Notizie (Nuovi modelli geometrici. Matematica e Artiglieria. Concorsi a premi), pag. 111-112.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

BOREL. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
BRAUDE. — Les coordonnées intrinséques. L. 2,25.
CASTELNUOVO. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III. L. 15.
DOLBNIA J. — Oeuvres mathématiques publiés par Kriloff. L. 12,50.
ENRIQUES. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
GUILLAUME. — Les récents progrés du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: SANDEN. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: HJELMSLEV. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
HAUSDORFF. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
SALPETER. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
SMITH e MIKAMI. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
ZEUTHEN. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

Digitized by Google

N. 4 PERIODICO TRIMESTRALE 1915

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA

ANNO XVII
1915

IV FASCICOLO

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1915

Pubblicato il 20 Novembre 1915.

Digitized by Google

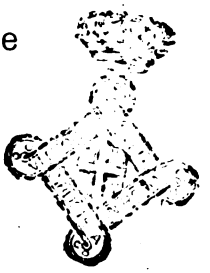
Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVII, Fasc. III: **Ottobre, Novembre e Dicembre** 1915

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le
Dr. J. H. GRAF, *Professeur à l'Université de Berne*

(Cont. v. pag. 86).



3. Lettres de E. Beltrami à L. Schläfli.

Venezia, 6 Agosto 1871.

Pregiatissimo Signor Professore

Con sommo gradimento ho ricevuto la riverita di Lei lettera in data del 31 Luglio, statami mandata da Bologna a Venezia; e con non minore soddisfazione ho rilevato da essa che Ella ha rivolto la sua attenzione alla teoria degli spazii pseudosferici, cosa dalla quale io mi riprometto molti vantaggi per questa teoria, la quale ha incontrato in Italia non pochi oppositori.

Rispetto alla questione di " dimostrare che l'elemento lineare gaussiano di uno spazio ad n dimensioni nel quale le geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari, è riducibile omograficamente alla forma $ds^2 = \frac{R^2}{x^2} \Sigma dx^2$, $\Sigma x^2 = a^2$ „, Le posso dire quanto segue.

Nel mio scritto intitolato: Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette (negli Annali di Matematica di Tortolini, Roma 1866) io ho dimostrato la proprietà in discorso delle superficie. Ma allora l'importanza *generale* della soluzione ottenuta mi era sfuggita, poichè la mia ricerca era stata occasionata puramente dalle considerazioni esposte nel § 1° di quello scritto. Del quale sono dolente di non poterLe

Digitized by Google

mandar subito un esemplare, cosa che farò al mio ritorno a Bologna.

Più tardi, quando la lettura delle " Geom. Untersuchungen " di Lobatschewsky e delle epistole di Gauss mi condusse a riflettere sulla questione dei principii della Geometria, io credetti di ravvisare una grande importanza nel fatto della *linearità* delle equazioni delle linee geodetiche sulle superficie di curvatura costante, e fu appunto seguendo quest'ordine d'idee che fui condotto a stabilire una distinzione molto netta fra il caso della curvatura positiva, e quello della negativa. Ma il metodo di cui mi sono servito, nel citato scritto, per dimostrare la proprietà in discorso nel caso di $n = 2$, non era adattato al caso generale, e però, quando volli passare a questo, preferii di approfittare della forma $ds^2 = \frac{R^2 (dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2)}{x^2}$, $(x^2 + x_1^2 + x_2^2 = a^2)$ per tentare la *verificazione* della stessa proprietà sulla forma generale precedentemente ricordata, e questa verificazione essendomi riescita felicemente, non mi venne più in pensiero di insistere nella ricerca della dimostrazione inversa. Per me, sarei dunque contentissimo di veder uscire questa dimostrazione dalla di Lei ricerca diretta, e non posso che desiderare vivamente che Ella pubblichi il suo lavoro, il quale avrà per risultato di richiamare autorevolmente l'attenzione dei geometri su questo argomento. Quanto all' *unicità* della soluzione, la difficoltà del dimostrarla procede *forse* dall'introduzione di casi analoghi (salvo la maggior varietà) a quelli che io ho analizzati nel § XV e XVI del citato scritto, e circa i quali mi sono limitato a dimostrare che conducono egualmente a superficie di curvatura costante. Potrebbe anche darsi che io avessi lasciato sfuggire qualche altra soluzione, e niuno meglio di Lei potrebbe rendermi di ciò avvertito.

L' annuncio della probabilità di un di Lei nuovo viaggio in Italia è stato per me una graditissima sorpresa, e accoglierò con vera gioia la conferma di questo progetto. Io mi trattengo a Venezia tutto il mese d'Agosto e forse anche qualche giorno di Settembre; poi debbo recarmi nel Friuli, ma io spero che se Ella realizzerà il suo disegno, non sarò così sfortunato da perdere anche questa volta l'occasione di fare la Sua personale conoscenza.

Intanto voglia aggradire i sentimenti della mia più distinta estimazione e della più cordiale mia simpatia.

Dev.mo E. Beltrami

S. Maurizio 2712.

Digitized by Google

Venezia, 17 Agosto 1871.

Preg.mo Sig. Professore

Le sono oltremodo riconoscente dell' intenzione ch' Ella ha di abbandonare il di Lei soggiorno prima del tempo, per procurarmi il piacere di fare la di Lei personale e desiderata conoscenza. Ma appunto per diminuire, se è possibile, gli inconvenienti di questa anticipazione, mi fo dovere d'informarLa che io *non lascierò Venezia prima del giorno* 9 di Settembre.

Il professor Cremona si troverà probabilmente non a Milano ma a *Paderno d' Adda*, e il suo indirizzo è *Carsaniga e Paderno d' Adda.*

Credo altresì utile avvertirLa che il luogo dove io mi recherò nel Settembre è a 4 chilometri da *Pordenone*, sulla ferrovia da Venezia a Trieste. Siccome ignoro il di Lei itinerario, non so se mai questa circostanza Le potesse permettere di differire a tempo la di Lei gita, senza privarmi del piacere di confabulare con un cosi distinto Collega.

Nella grata aspettazione di questo incontro, non entro a parlare d' argomento scientifico, proponendomi già di intrattenerLa a voce su alcune quistioni insorte a proposito della geometria pseudosferica. Intanto sono ben lieto che, come apparisce dalla di Lei seconda Lettera, Ella abbia potuto completare la dimostrazione di cui mi parlava nella antecedente, e desideri assai di vederla ben presto pubblicata negli *Annali,* al qual uopo Le offro fin d' ora l'opera mia per la traduzione in italiano.

Aggradisca i sentimenti alla mia affettuosa stima e devozione

E. Beltrami.

Bologna, 20 Settembre 1873.
(Via Toschi 1226)

Onorevolissimo collega ed amico

Sono molto contento di trovarmi tutt'ora in Bologna, per potermi procurare il piacere di rivederLa al suo passaggio per questa città. Perciò prego istantemente di scrivermi subito il giorno e l'ora del suo arrivo, acciò io mi possa trovare alla stazione. Spero che Ella vorrà approfittare della mia casa, e senz' altro La tengo impegnata a passare presso di me il tempo che Ella conta di trattenersi in Bologna.

Digitized by Google

Dal prof. Cremona (che passò di qui nel recarsi a Roma, dove ora si trova) seppi che Ella doveva recarsi a Firenze, ma senza esatta indicazione dell'epoca. Perciò, trovandosi qui jeri l'altro il prof. Helmholtz, lo richiesi se avesse per caso avuto notizia di Lei dal prof. Schiff: ma essendosi egli trattenuto a Firenze pochissimi giorni non aveva avuto il tempo di andare in cerca di alcun collega.

Colla più cordiale stima ed affezione

dev.mo Eugenio Beltrami.

Pavia, 21 Aprile 1879.

Chiarissimo professore

Dopo lungo silenzio, in gran parte attribuibile ai frequenti mutamenti di mio domicilio, ed alla salute per molti anni non buona (ora però migliorata), mi permetto dirigerLe queste mie righe per un argomento che al di Lei nobile animo sembrerà atto a giustificare il mio ardimento.

Nel passato mese di novembre è morto in Roma il padre Chelini, già professore nell'Università di Bologna, da Lei conosciuto nel 1846. I molti amici e già colleghi di Chelini, memori delle molte sue doti di mente e di cuore, e memori altresì delle amarezze immeritate che lo colpirono negli ultimi anni di sua vita, per aver egli, in ossequio ai suoi doveri di frate, dovuto ricusare di dar giuramento al Regno d'Italia (nonostante i suoi sentimenti schiettamente liberali), hanno deliberato di onorarne la memoria col pubblicare un volume di scritti matematici intitolati al suo nome.

Siccome a questa pubblicazione prendono parte pressochè tutti quelli che lo hanno conosciuto, o che hanno avuto rapporti con lui, così abbiamo pensato, il Prof. Cremona ed io, che anch'Ella non rifiuterebbe forse di apportare la desideratissima sua cooperazione, ed io ho assunto l'incarico di pregarLa, come faccio, a favorirci un di Lei scritto matematico, per onorarne il detto volume.

Ella è pienamente libero di sceglierne l'argomento in qualunque campo Le piaccia, del pari che di dargli quella maggior o minore estensione che Le parrà. E parimente Ella può inserirlo nel volume in lingua tedesca, come in ogni altra lingua (essendo già pronti, oltre a lavori italiani, articoli inglesi e francesi).

L'unico vincolo al quale Ella dovrebbe sottoporsi sarebbe di non pubblicare la *stessa* Memoria in altra Collezione o periodico,

Digitized by Google

avendo l' Editore richiesto tale condizione per rendere possibile la diffusione del volume.

Io spero che Ella, cui non manca mai il materiale di dotte e sempre preziose ricerche, non vorrà rifiutarci il contributo che chiediamo in nome di un' antica amicizia.

La prego di perdonare la libertà che mi son presa, e di credermi sempre, con vera ed affettuosa stima,

dev.mo suo

E. Beltrami.

P. S. — Le sarò molto tenuto, se, avendone l' occasione, Ella si compiacerà di presentare i miei cordiali saluti all' Egregio professore Valentin.

Pavia, 16 Marzo 1883.

Chiarissimo collega

La questione cui Ella allude è trattata nel § VII, p. 32, della mia Memoria *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi* (Bologna, 1880). Io credo d' averLe a suo tempo inviato un esemplare di questa Memoria, ma se mai Ella non lo trovasse, La prego di avvertirmene, perchè procurerò di trovarne un altro. Nel detto §, oltre l' anello ellittico simmetrico, ho trattato anche quell' altro che fu considerato da Gauss nella nota Memoria *Determinatio attractionis quod exerceret planeta etc.*

La formola dell'anello ellittico si trova anche nella mia nota dello stesso 1880 sull'attrazione di un anello circolare od ellittico, Nota di cui Le mando un esemplare (benchè anche di questa debba averle spedito copia a suo tempo), e dove la formola in discorso è l'ultima della p. 9.

Godo assai che Ella si stia occupando di questi argomenti e spero che Ella vorrà far parte al pubblico dei risultati certamente preziosi che Ella non mancherà di ritrovare. Nel momento presente io sono sopratutto occupato di oggetti relativi alla teoria del magnetismo.

Ho udito con molto dispiacere che le condizioni di salute dell'ottimo prof. Valentin sono sempre più gravi. Se Ella crede che ciò non possa essere inopportuno, voglia aver la compiacenza di presentargli i miei saluti e di esprimergli il mio vivo desiderio e la mia speranza che Egli possa entrare in un periodo di sensibile miglioramento.

Digitized by Google

Farò i di Lei saluti al Casorati, che da qualche giorno non ho veduto. Ella riceva intanto i miei affettuosissimi insieme con quelli di mia moglie.

Dev.mo suo

E. Beltrami.

Pavia, 23 Marzo 1883.

Egregio amico e collega

Non occorreva che Ella mi rinviasse la nota sugli anelli, avendone io parecchi altri esemplari.

Ma poichè Ella mi parla di una Dissertazione che potrebbe essere composta da un di Lei allievo sull' anello ellittico, e nella quale potrebbe forse essere citata l'altra mia Memoria sull' attrazione degli ellissoidi, sento l' obbligo di coscienza di farLe osservare che nell'ultimo fascicolo del *Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik* (T. XII, Heft 3, p. 720), è dato dal recensente B. (Bruns in Leipzig) un giudizio sostanzialmente poco favorevole di quella Memoria. Infatti il recensente dice che il metodo è nuovo ed interessante, ma che i risultati sono tutti conosciuti (*Resultate, die der Hauptsache nach bekannt oder aus bekannten ohne Schwierigkeit herzuleiten sind*).

Io non mi trovo colpito da questa affermazione, anche se è conforme al vero, perchè non ho detto in nessun luogo che tenessi per nuovi almeno alcuni dei risultati dedotti. E infatti debbo confessare che, a parte le Memorie classiche sull' argomento, io non ho preso conoscenza di molte delle numerose pubblicazioni più o meno recenti che sono state fatte sul soggetto, ed ho avuto soltanto l' intenzione di dare un'esposizione sistematica e possibilmente semplice delle principali parti della teoria, come la do nelle mie lezioni.

Comunque sia, si deve dunque credere che le diverse formole relativi agli anelli sieno state date altrove, ed è questo che mi premeva di farLe sapere, affinchè il giovane che si propone di fare la Dissertazione procuri di conoscere questi lavori, che non furono conosciuti da me, e non mi attribuisca per caso un merito che non ho.

Io ho una confusa reminiscenza di aver veduto (molti anni addietro) trattate queste questioni in una Memoria nel *Quarterly Journal*. Ma siccome questo giornale non esiste presso la nostra Biblioteca, non ho potuto verificare se si tratti realmente di ricerche analoghe.

Digitized by Google

Sono molto dispiacente delle notizie circa la salute e le sofferenze del carissimo prof. Valentin, alla cui memoria La prego di sempre ricordarmi con affetto.

Casorati la saluta molto cordialmente.

Accetti gli amichevoli saluti di mia moglie e quelli del suo

aff.mo E. Beltrami.

Silvaplana 7 Settembre (1883)

Egregio amico e collega

Ho ricevuto a suo tempo la carissima sua lettera e Le avrei dato prima d'ora mie ulteriori notizie, se diversi incidenti non avessero reso alquanto travagliata la mia dimora in Silvaplana. Il Casorati ritardò alquanto la sua venuta, in causa di quella sua indisposizione fisica di cui Le feci già cenno. Arrivato qui, durò qualche fatica a ristabilirsi in salute, ma da ultimo si trovò molto avvantaggiato. Se non che dovette ripartire per alcune necessità famigliari (essendo prossimo il matrimonio della sua figlia maggiore) e, benchè si proponesse di tornare in Engadina, mi scrisse jeri di non poter più fare questo viaggio, anche in causa del tempo piuttosto freddo che è ora sopravvenuto. — Io stesso mi sono ammalato, forse per qualche colpo d'aria, e ho dovuto stare in letto qualche giorno. Dopo di me, anche mia moglie è stata colpita da forte raffreddore e non è ancora perfettamente ristabilita. Per tutte queste circostanze, malgrado il desiderio che io avrei avuto di prolungare il mio soggiorno in Engadina, mi sono deciso ad approfittare del tempo discretamente buono che è sopravvenuto oggi, dopo lunga serie di giornate cattive per ritornare senz'altro in Italia.

Sono molto dispiacente di non aver avuto quest'anno l'occasione di riverirLa, e desidero quindi che in una prossima occasione mi sia data la possibilità di procurarmi una così gradita soddisfazione.

Cremona non è punto venuto da queste parti.

Accolga gli affettuosi saluti di mia moglie e del suo dev.mo

E. Beltrami

Pavia, 1° Febbraio 1884.

Egregio e caro collega

Da un foglio a stampa che ho ricevuto da Zurigo rilevai che i professori svizzeri hanno degnamente voluto esprimerLe i

Digitized by Google

loro sentimenti di affettuosa venerazione, in occasione del 70° anniversario della di Lei nascita. Benchè l'epoca precisa di tale anniversario sia ora trascorsa da parecchi giorni, spero di essere considerato da Lei come ancora in tempo per associarmi con tutto il cuore ai sentimenti manifestati dai colleghi svizzeri, sentimenti che sono quelli di tutti i matematici viventi. Io poi posso farne testimonianza con tanto maggiore entusiasmo, perchè sono tra quelli che hanno avuto la fortuna di conoscerLa personalmente e di apprezzare non soltanto il dotto, ma ancora l'uomo. Voglia dunque Ella aggradire l'espressione di sincera ammirazione e di vivissimo affetto che parte dall'animo mio, e voglia pur credere ai voti che io faccio per la di Lei lunga conservazione, voti che io innalzo a quella qualunque sede donde emanano le idealità più pure del pensiero umano.

Accolga i cordiali saluti ed augurii di mia moglie e mi creda sempre

aff.mo suo

E. Beltrami.

Pavia, 4 Gennaio 1885.

Carissimo e venerato collega

Ho dovuto allontanarmi da Pavia durante le ultime feste di Natale ed ho ricevuto la graditissima di Lei lettera con qualche ritardo. Le sono oltremodo riconoscente del gentile pensiero di inviarmi la di Lei fotografia, e la tengo fra le cose carissime. La prego poi di accogliere, benchè in ritardo, i più cordiali ed affettuosi auguri che io faccio, insieme alla mia moglie, per la di Lei prosperità in questi anni e per la lunga serie di anni avvenire.

Il modesto giudizio che Ella fa di sè medesimo è confermato dai contemporanei, i quali s'accordano tutti nell'ammirare la straordinaria di Lei acutezza d'investigazione. Del resto le due attitudini che ella denomina „kritische Sinn„ e „schaffende Verstand„ non sono diverse essenzialmente e forse sono due variabili che hanno lo stesso limite.

In questo anno mi occupo specialmente, tanto nelle lezioni, quanto nel mio studio privato, della teoria dell'elasticità, la quale mi interessa molto, anche dal lato del metodo. In particolare sto studiando una questione che si collega con quelle vedute di Maxwell le quali tenderebbero a stabilire un nesso intimo fra

Digitized by Google

i fenomeni elettrici e gli elastici. Finora le mie deduzioni sarebbero piuttosto contrarie alla possibilità di questo nesso, ma non ardirei ancora di formulare conclusioni assolute, tanto più che lo stesso Maxwell non ha voluto dare una forma precisa alla sua interpretazione ed ha sperato, disgraziatamente invano, di ottenere dal tempo risultati più concreti.

Gradisca i sentimenti di altissima stima e sincera amicizia del suo dev.mo

E. Beltrami.

Pavia, 22 Luglio 1891

Chiarissimo Collega

Ricevo la gradita sua lettera del 21 corrente e mi affretto a scriverLe intorno alla tanto deplorata perdita dell'ottimo amico Casorati. Avrei già fatto ciò fino dallo scorso anno, se non fossi stato io stesso in gravi inquietudini per una pericolosa malattia allora sofferta da mia moglie, da cui essa non è pur troppo neppure adesso completamente guarita.

Il primo attacco del male a cui il povero Casorati dovette poi soccombere risale all'ottobre del 1889, quando egli si trovava a villeggiare sul Lago Maggiore. Al suo ritorno in Pavia egli potè però riprendere le lezioni, e le continuò fino verso Pasqua del 1890, benchè tutti riconoscessero ch'egli era in istato di visibile deperimento. Verso questa stessa epoca egli fece un consulto medico, di cui gli fu nascosto il vero risultato: ma io seppi fin d'allora ch' egli era colpito da cancro (al mesenterio), malattia di cui erano già stati vittime suo padre e sua madre. Dopo Pasqua il Casorati cessò di far lezione, ma rimase sempre alzato e continuò per più mesi a far passeggiate in carrozza, portandosi alla fine in campagna, nelle colline di Casteggio, dove morì senza sofferenze. Questo è l'unico conforto avuto dai molti amici di lui, che, contro tutte le previsioni dei medici, egli non abbia mai avuto a soffrire gli acuti dolori che d'ordinario accompagnano lo sviluppo delle affezioni cancerose. La morte avvenne per semplice esaurimento. Del resto egli non ebbe mai sospetto d'essere attaccato da così grave malore, e persino negli ultimi suoi giorni insisteva per farsi trasportare sul Lago di Como, ove si teneva sicuro di ricuperare la salute!

Duolmi oltremodo di udire che Ella è molestato da ostinato reumatismo e che la cura del massaggio, forse applicata da per-

Digitized by Google

sona non debitamente pratica, Le ha arrecato danno anzichè vantaggio. Io faccio voti perchè Ella possa vincere i cattivi risultati di questa cura, ed ottenere poscia la guarigione con altro mezzo, o collo stesso mezzo adoperato in condizioni migliori.

Fortunatamente le affezioni reumatiche, per quanto incomode e dolorose, possono essere vittoriosamente combattute, in un organismo così robusto quale è il suo.

Augurandole di cuore questo felice risultato, mi dico di Lei

dev.mo aff.mo

(*Continua*). E. BELTRAMI.

LUIGI FORNI

MATEMATICO PAVESE (1)

Nota di G. VIVANTI

LUIGI FORNI, figlio dell'Ing. GEROLAMO, nacque in Pavia il 1° settembre 1780. Compiuti gli studi elementari e secondari, frequentò nell'Università di Pavia i corsi di matematica, e, studente ancora, fu dal rettore VINCENZO BRUNACCI nominato ripetitore di matematica applicata. Ebbe la laurea nel 1805, e non molto tempo dopo, con Decreto vicereale del 31 gennaio 1807, fu nominato professore di matematica nella *Scuola teorico-pratica d'artiglieria* istituita da NAPOLEONE a Pavia nel Monastero di S. Pietro in Ciel d'Oro con Decreto 22 luglio 1803. Questa scuola, che non deve confondersi colla Scuola militare esistente allora nel Collegio Ghislieri (2), aveva lo scopo di dare l'istruzione teorico-pratica agli ufficiali, sottufficiali e soldati, e di esercitarli nel poligono, il cui progetto è dovuto allo stesso FORNI (3).

(1) Le notizie biografiche seguenti sono in parte desunte dall'opera: C. DELL'ACQUA. *Ricordi storico-biografici pavesi* (Pavia, Fusi, 1870), in parte raccolte dalla bocca del figlio di LUIGI FORNI, Avv. GEROLAMO, al quale esprimo qui pubblicamente la mia riconoscenza.

(2) Il Collegio Ghislieri fu convertito in *Collegio nazionale* il 5 dicembre 1796, poi in *R. Scuola militare* il 7 luglio 1805. Vi insegnarono matematica COLLALTO, TOGNOLA, GRATOGNINI, PAGANINI e BORDONI. La scuola fu sciolta il 2 settembre 1816. Vedi: A. GALLETTI, *Il Collegio Ghislieri di Pavia*, Pavia, Bizzoni, 1890.

(3) Sulla Scuola d'Artiglieria vedi: A. ZANOLI, *Sulla milizia cisalpina italiana*, Milano, Borroni e Scotti, 1845. Oltre al FORNI fu insegnante di matematica

Digitized by Google

Caduto il Regno italico, e chiusa la scuola, furono offerte al Forni varie cattedre sì in Italia che all'estero; ma egli, fedele ai suoi principi politici, nulla volle accettare dal nuovo governo, e si ritirò a vita privata. Ebbe 8 figli - 6 maschi e 2 femmine -, di cui due sono tuttora viventi. Morì il 12 settembre 1856; fu sepolto nel Cimitero monumentale di Pavia, e sulla sua tomba si legge la seguente epigrafe:

ALLA MEMORIA — DELL'ING. LUIGI FORNI — MATEMATICO PAVESE — PROFESSORE ALLA SCUOLA TEORICO-PRATICA — DI ARTIGLIERIA — CHE IL PRIMO CONSOLE — DELLA REPUBBLICA CISALPINA — ISTITUIVA NEL- L'ANTICA — METROPOLI TICINESE — VAGO DELLE AMENE LETTERE — SORDO A VANITOSE LUSINGHE — LIETO NELLA DOMESTICA PACE — DA CUI LO DIVELSE LA MORTE — IL 12 SETTEMBRE 1856 — A LUI SETTANTESIMOSESTO — LASCIANDO ALLA MOGLIE AI FIGLI — VIRTUOSO CONFORTO.

Nel 1811 Luigi Forni pubblicò un'opera intitolata: *Nuove ricerche analitiche, geometriche e meccaniche contenenti i metodi generali della divisione, iscrizione e circoscrizione delle figure, dedotte dalla comparazione delle serie* (Pavia, Bolzani, 1811; 4° p. XVI-229 e 2 Tav.). Di quest'opera tacciono il Riccardi ed il Poggendorff; la cita P. Tardy (1), il quale osserva che le formole simboliche:

$$\Delta^n y = \left(e^{\omega \frac{dy}{dx}} - 1\right)^n, \quad \omega^n \frac{d^n y}{dx^n} = [\lg (1 + \Delta y)]^n,$$

dove ω denota la differenza costante di x, sono state estese dal Forni ad indici frazionari, ma sembra sia rimasta ignota a coloro che si occuparono della definizione di derivata ad indice non intero. Crediamo pertanto cosa non inutile passare in rapida rivista il contenuto delle *Nuove ricerche*, traducendo, per maggior chiarezza, i concetti dell'autore nel linguaggio oggidì usato nell'Analisi.

L'autore definisce anzitutto ciò che deve intendersi per

---

nella Scuola d'artiglieria Luigi Grupelli, autore di un opuscolo intitolato: *Memorie di matematiche* (Milano, Giusti, 1834). Ecco i titoli delle quattro memorie di cui si compone questo opuscolo:

1. Osservazioni intorno alle equazioni di grado superiore al secondo. 2. Serie logaritmiche. 3. Osservazioni intorno alle serie ricorrenti. 4. Equazioni indeterminate di primo grado.

(1) *Intorno ad una formola del Leibniz*, Bull. di bibl. e st. delle sc. mat. e fis., T. 1, 1868, p. 177-186.

Digitized by Google

" interpolazione di una serie ". Data una successione di funzioni $\varphi(x, 1)$, $\varphi(x, 2)$,..., e dato un numero intero e positivo r, si tratta di trovare una funzione $\Phi(x, n)$, differente da $\varphi(x, n)$ soltanto per i valori delle costanti che vi figurano, e tale che sia identicamente:

$$\Phi(x, (r+1)\,n) = \varphi(x, n).$$

Da questa interpolazione, che egli chiama " analitica ", è da distinguersi l'interpolazione " numerica ", che si riferisce a successioni di elementi costanti, e che può essere esatta o approssimata.

La successione delle differenze finite, e quella delle derivate, d'una funzione non sono esattamente interpolabili; però l'interpolazione può effettuarsi nel primo caso in forma di sviluppo in serie, estendendo ad indici frazionari la nota formola del Calcolo delle differenze finite che esprime la differenza n-esima di una funzione mediante $n+1$ valori successivi di essa, e si passa poi dalle differenze alle derivate mediante le formole simboliche riportate poc'anzi. È inutile avvertire che si tratta qui di sviluppi puramente formali.

Lo scopo principale che si propone l'autore è di applicare le sue considerazioni a questioni geometriche e meccaniche. Sia t il parametro variabile dei punti d'una curva piana, e $\varphi(t)$, $\psi(t)$ rappresentino due elementi relativi alla curva (ascissa, ordinata, arco, area, etc.). Possono presentarsi due problemi, e cioè:

Problema diretto: Data la successione $\varphi(0), \varphi(1),...$, e data la relazione tra φ e ψ (che può contenere derivate, integrali, differenze finite etc.), trovare la successione $\psi(0), \psi(1),...$.

Problema inverso: Date le due successioni, trovare la relazione tra φ e ψ.

Ecco qualche esempio di problemi diretti: Determinare sopra una retta data i segmenti visti sotto angolo eguale da un punto dato. Dividere un segmento in parti eguali mediante parabole di cui sono dati il vertice e l'asse, a tutte comuni. — Dividere un triangolo in n parti equivalenti mediante rette parallele ad una data direzione. Meritano anche di essere segnalate alcune questioni di meccanica e di idrodinamica.

Ed ecco alcuni esempi di problemi inversi: Trovare una curva in cui ad ascisse procedenti in progressione geometrica corrispondano aree procedenti in progressione aritmetica. Trovare le

Digitized by Google

curve per cui l'ascissa e l'arco sieno funzioni date d'un parametro. Alla classe dei problemi inversi appartengono anche i problemi relativi alle traiettorie ed alle curve parallele.

L'ultimo capitolo tratta della iscrizione e circoscrizione dei poligoni e delle curve.

Uno dei problemi inversi trattati dall'autore lo conduce ad una curva del 4° ordine, che crediamo non sia stata studiata da altri, e la cui equazione polare è:

$$\varrho^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi ;$$

essa ha forma simile alla concoide, e può essere descritta con moto continuo.

Storia.

G. Enestrom, *Verzeichniss der Schriften Leonhard Eulers.* Zweite Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner 1913. 8°. p. 209-388.

Questo secondo fascicolo dell'indice degli scritti di Eulero (cfr. *Bollettino* T. XV, 1913 p. 11-12) si apre con una ricca serie di aggiunte al contenuto del I Fascicolo. Quindi vi si trova l'Indice di tutti gli stessi scritti ordinati in base alla data della loro composizione. Una terza utilissima Sezione contiene l'elenco degli stessi lavori per ordine di materie; ora un tale indice ha, in fondo, come base una classificazione delle scienze matematiche, quindi, a differenza degli indici precedenti, contiene traccia delle opinioni personali di chi lo redasse, epperò non contenterà tutti e sarà bersaglio ad inevitabili critiche (ad es. non è chiaro perchè gli scritti relativi alla rettificabilità delle curve mediante funzioni di data specie siano stati posti alcuni sotto la rubrica " analisi infinitesimale indeterminata „ (p. 291) ed altri in quella intitolata « rettificazione in generale » (p. 306). Ma quando, in seguito ad attento esame, si è presa qualche famigliarità con i criteri prescelti dall'autore, si riesce a trarre da quell'Indice tutto l'utile che esso è capace di dare. Chiude il volume un diligentissimo e assai perticolareggiato indice di tutta l'opera, il quale ne rende il maneggio oltremodo agevole. Un terzo fascicolo, già annunciato, completerà il dotto lavoro dell'Enestrom.

G. L.

E. W. Hobson. " *Squaring the circle* „. *A history of the problem.* Cambridge, University Press, 1913: 8°. p. 57.

Più di trent'anni sono trascorsi dal giorno in cui F. Lindemann ha dato una soluzione definitiva, per quanto negativa, al

Digitized by Google

problema della quadratura del circolo. Tuttavia questa memorabile scoperta non è peranco entrata a far parte della coscienza universale, probabilmente perchè, per afferrare il significato preciso del risultato conseguito, occorre disporre di cognizioni matematiche superiori a quelle che possiedono le persone di media cultura; in conseguenza quella scoperta non ha peranco dati tutti i frutti che se ne potevano ragionevolmente attendere, prova ne sia che la mala pianta dei pretesi quadratori del circolo non venne ancora estirpata. A diffondere la conoscenza di quell'importantissimo risultato si è adoperato da par suo F. Klein con un opuscolo celebre, che venne subito tradotto nelle principali lingue europee (l'italiana non esclusa), ed il suo esempio fu seguito da parecchi. A questi si aggiunge il prof. Hobson, con lo scritto che annunziamo e che compendia sei pubbliche letture da lui tenute all'Università di Cambridge. Ivi l'egregio successore di Cayley, dopo di avere chiaramente caratterizzati la natura e lo scopo dell'indicata questione, con pieno fondamento ne ripartisce la millenaria storia in tre periodi. Il primo comprende l'epoca che va dalle origini della scienza all'invenzione del calcolo infinitesimale; la parte di protagonista fu allora rappresentata da Archimede, grazie all'immortale suo lavoro sopra la " misura del cerchio „. Il secondo periodo è caratterizzato dall'applicazione dei nuovi calcoli alla ricerca di espressioni analitiche di elegante struttura che servissero convenientemente al calcolo di π; esso è dominato da Eulero. Nel terzo periodo l'attenzione dei matematici si rivolse alla determinazione della natura analitica del numero π e si chiude con la dimostrazione della inesistenza di un'equazione algebrica a coefficienti interi di cui quel numero sia radice. L'A. ha accuratamente studiate ed abilmente utilizzate le pubblicazioni anteriori sull'argomento; di più, a differenza degli storici precedenti del celebre problema, ha tenuto conto anche delle ricerche sulla quadratura del cerchio fatte nell'Estremo Oriente e di cui soltanto di recente si ebbe notizia sicura. Una semplice critica ci sia permessa; ed è riguardo al modo con cui l'A. scrive i nomi di Leibniz e Bernoulli (p. 36 e 37), il quale si stacca da quelli generalmente in uso e che sembrano conformi a verità. G. L.

Sir Thomas Heath. *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus. A History af Greek Astronomy to Aristarchus together with Aristarchus's Treatise On the sizes and distances of the Sun and Moon, a*

Digitized by Google

new Greek Text with Translation und Commentary. Oxford, Clarendon Press 1913: 8° p. VIII 425 (prezzo sh. 18).

La vita di Aristarco Samio è nota imperfettamente (come accade del resto per quasi tutti gli scienziati dell'antica Grecia): sappiamo soltanto che egli appartenne al periodo interposto fra Euclide ed Archimede, cioè circa fra il 310 ed il 230 a. C. Delle sue opere una sola si sottrasse all'ingiuria del tempo: è quella intitolata *Delle dimensioni e delle distanze del sole e della luna*, scritto geometrico che gli antichi collocarono nella collezione di lavori atti a preparare alla lettura della grande opera astronomica di Claudio Tolomeo. I moderni mostrarono di apprezzarne il valore curandone tre edizioni, una dovuta al Wallis (1688), le altre a Fortia d'Urban (1810, 1823); ma era desiderata una nuova pubblicazione di quell'opera che meglio corrispondesse alle esigenze della critica moderna, tenendo conto dei manoscritti esistenti nella Biblioteca Vaticana ed in quelle di Parigi, Venezia, Milano Vienna, ecc. Ora, accogliendo un invito del prof. Tanner di Oxford, T. L. Heath (ben noto per le sue pubblicazioni intorno a Archimede, Apollonio, Euclide e Diofanto) vi si accinse. Ma nel corso degli studi preparatori all'impresa, il primitivo piano subì (fortunatamente!) un ampliamento inatteso ed una profonda trasformazione; mentre in origine l'autore intendeva di premettere all'opera di Aristarco un semplice cenno intorno allo sviluppo storico dell'astronomia greca anteriore, egli finì per scrivere una vera e propria storia di tale scienza dalla origine sino ad Aristarco stesso. È un lavoro a cui già si accinse e che in buona parte compì Th. H. Martin; è un lavoro che somiglia in parte alle *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* di P. Tannery, ma che ne differisce non fosse altro perchè questi si occupa lungamente anche di coloro che vennero dopo Aristarco.

L'Heath comincia il suo lavoro facendo conoscere le fonti a cui deve ricorrere chi voglia delineare l'evoluzione del pensiero astronomico presso i Greci, e quindi tratta successivamente di Omero ed Esiodo, di Talete, Anassimandro, Anassimene, Pitagora, Zenofane, Eraclito, Parmenide, Anassagora ed Empedocle; studia poi i posteriori Pitagorici, gli Atomisti (Leucippo e Democrito), Oinopide e Platone; due ben nutriti capitoli egli dedica alla teoria delle sfere omocentriche quale s'incontra in Eudosso da Cnido, Calippo ed Aristotele; l'ultimo degli scien-

Digitized by Google

ziati da lui considerati è Eraclide da Ponto. Per ciascuno egli raccoglie tutte le antiche testimonianze relative alle sue elucubrazioni celesti, ne presenta una fedele traduzione, discute le varie interpretazioni cui diedero luogo e le questioni che sollevarono, somministrando così al lettore tutti gli elementi per decidere se accogliere o respingere le vedute proprie dell'autore. Con un Capitolo relativo ai cicli cronologici dei Greci si chiude l'interessante I Parte della pubblicazione in esame.

La II si apre con un'esposizione di quel poco che si conosce intorno alla personalità di Aristarco; segue la storia del testo e l'enumerazione delle edizioni del trattato *Delle distanze e delle dimensioni*, poi un'esposizione in linguaggio moderno del contenuto di esso e finalmente estese notizie sopra i perfezionamenti subiti posteriormente dai metodi e dai risultati conseguiti da Aristarco. Si incontra finalmente il testo greco di quel trattato, accompagnato da una traduzione letterale in inglese e da note critiche e esplicative. Quando avremo aggiunto che il volume si chiude con un esatto Indice alfabetico dei nomi e delle cose, avremo completato l' elenco degli argomenti atti a provare come in esso nulla manchi di ciò che può servire a procacciarsi una nozione esatta di ciò che fu la scienza degli astri presso i Greci sino alla comparsa di colui a cui a ragione compete il nome di Copernico dell'Antichità. Sciagura volle che l'opera in cui egli espose le sue idee rivoluzionarie sia andata perduta e che gli astronomi posteriori abbiano trascurata un'ipotesi che, per gli scopi a cui essi miravano, sembrava e forse era dotata di scarsa importanza. Ma era fatale che, presto o tardi, essa si ripresentasse e si imponesse; oggi che essa ha perduto ogni carattere ipotetico per divenire uno dei cardini della scienza nostra, la figura di colui che per primo l'emise ci si presenta ancora più gigantesca che in passato; onde ben fu ispirato Sir Heath elevando alla sua memoria il grande monumento rappresentato dal volume che con queste linee raccomandiamo ai nostri lettori. G. L.

Teoria degli insiemi.

F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig, Veit, 1914: 8° p. VIII + 476.

Lo scopo che si propone l'autore, ed i criteri che lo hanno guidato nello svolgimento del suo programma, sono esposti con

Digitized by Google

grande chiarezza nella breve prefazione che sta in testa al volume. Il libro è un *Trattato* e non un *Rapporto* — vuole sviluppare la teoria degli aggregati senza presupporre in chi legge conoscenze elevate d'Analisi; la teoria deve avere la prevalenza sulle applicazioni; ogni asserto dev'essere rigorosamente dimostrato; l'esposizione dev'essere organica, e conciliare la semplicità colla generalità. Ciò ha condotto l'autore a trasformare completamente alcune parti della teoria, le quali acquistano così un aspetto tutt'affatto nuovo; teoremi noti si presentano sotto una luce del tutto diversa dalla solita, e spesso quali casi particolari di risultati d'assai più ampia portata.

La novità dell'esposizione si rende visibile sin dalle prime pagine. Introdotto il concetto di *aggregato* (C. 1), e definita la *somma* **S** (A, B) e l'*intersezione* **D** (A, B) di due aggregati A, B, l'autore svolge ciò che potrebbe dirsi una teoria aritmetica degli aggregati; dimostra le proprietà formali delle operazioni **S**, **D**, e stabilisce un *principio di dualità*, mediante il quale da ogni proposizione si può dedurne una nuova sostituendo a ciascun insieme il suo complemento, e scambiando i segni **S**, **D** ed i segni $>$ (*contiene*), $<$ (*è contenuto*); fa vedere come la **D** possa esprimersi per somme e differenze; studia le funzioni simmetriche di più aggregati, le quali sono tutte esprimibili per somme e intersezioni. Considera poi i sistemi di aggregati tali che, se A e B appartengono al sistema, lo stesso ha luogo per **S** (A, B), **D** (A, B), e quelli più speciali per cui, se **A** e B appartengono al sistema, lo stesso ha luogo per **S** (A B), **A** — B (supposto che A contenga B); studia le successioni di aggregati ed i loro limiti, e, come caso particolare, le successioni di funzioni.

Se a ciascun elemento i d'un insieme J si fa corrispondere un certo insieme A_i, si presenta spontanea (C. 2) la considerazione della somma $\mathbf{S}^J(A_i)$ e dell'intersezione $\mathbf{D}^J(A_i)$ degli aggregati A_i secondo l'*argomento* J; può anche definirsi il loro *prodotto* $\mathbf{P}^J(A_i)$. È interessante studiare le leggi di queste operazioni, ed esaminare quali mutamenti avvengono se a J si sostituisce un aggregato equivalente. L'*equivalenza*, già definita nel C. 2, forma l'oggetto principale del C. 3, dove sono svolte le più notevoli proprietà dei numeri cardinali trasfiniti, e particolarmente della potenza A_0 degli aggregati numerabili e della potenza A del continuo (1).

(1) Scriviamo A in luogo della lettera ebraica *alef* per ragioni tipografiche.

Digitized by Google

Nel C. 4 si introducono i concetti di *aggregato ordinato,* di *somiglianza* e di *tipo ordinale,* si studiano le operazioni sugli aggregati ordinati, si stabiliscono le definizioni di aggregato ordinato *denso, continuo, sparso* (*zerstreut*), e si esaminano in particolare i tipi numerabili. Si passa poi (C. 5) agli *aggregati ben ordinati* ed ai *numeri ordinali,* la cui teoria viene svolta diffusamente; il capitolo termina colla dimostrazione del *teorema di Zermelo.* Lo studio dei rapporti tra gli aggregati ordinati e gli aggregati ben ordinati è l'oggetto del C. 6, il cui ricco contenuto difficilmente potrebbe condensarsi in poche linee; accenneremo soltanto al concetto di *aggregato parzialmente ordinato,* ed all'estensione della moltiplicazione di più aggregati ordinati al caso di un numero infinito di fattori.

Col C. 7 incomincia la teoria degli aggregati di punti. Qui però l'autore prende un punto di vista assai più generale di quello dell'ordinaria geometria, e si rifiuta di ricorrere al sussidio dell'intuizione. Egli chiama *spazio topologico* un aggregato di elementi (*punti*), a ciascuno dei quali corrispondono certi aggregati parziali (*intorni*) soggetti alle seguenti leggi:

a). Ad ogni punto x corrisponde almeno un intorno U_x; ogni intorno U_x contiene x.

b). Dati due intorni qualunque d'uno stesso punto, esiste un intorno di esso contenuto in ambidue.

c). Se il punto y appartiene ad U_x, esiste un intorno U_y di y contenuto in U_x.

d). Dati due punti diversi, possono assegnarsi due intorni di essi non aventi elementi comuni.

Un punto x d'un insieme è *interno* ad esso, se esiste un U_x contenuto nell'insieme; nel caso contrario appartiene al *contorno* dell'insieme. Un insieme di cui tutti i punti sono interni si dice *dominio* (*Gebiet*).

Da un aggregato qualunque A si deducono gli aggregati seguenti:

A_α, insieme dei punti dello spazio, in ogni intorno dei quali vi sono punti di A;

A_β, insieme dei punti, in ogni intorno dei quali vi sono infiniti punti di A;

A_γ, insieme dei punti, in ogni intorno dei quali vi è una infinità non numerabile di punti di A.

Evidentemente si ha:

$$A_\alpha \geqq A, \quad A_\alpha \geqq A_\beta \geqq A_\gamma;$$

Digitized by Google

A_β è l'insieme *derivato* di A. L'insieme A è *chiuso* se $A \geq A_\beta$ o $A = A_\alpha$, *concentrato* (*insichdicht*) se $A \leq A_\beta$ o $A_\alpha = A_\beta$; *perfetto* se $A = A_\alpha = A_\beta$; analogamente possono definirsi altri caratteri degli aggregati di punti. La parte d'un insieme chiuso contenuta in un insieme M costituisce un insieme *chiuso relativamente ad M;* la parte d'un dominio contenuta in M costituisce un *dominio relativamente ad M.* Così può svolgersi parallelamente alla teoria fin qui accennata una *teoria relativa ad un insieme M,* che presenta tratti diversi a seconda della diversa natura di questo insieme. Anche il concetto di connessione può estendersi allo spazio topologico; un insieme è *connesso* se non può scomporsi in due parti chiuse. Conviene notare che questa definizione non coincide con quella di CANTOR; così p. es. l'insieme dei numeri razionali è connesso secondo CANTOR, mentre non lo è secondo il nostro autore.

Una notevole specializzazione viene introdotta nel C. 8 attribuendo allo spazio l'una o l'altra delle due proprietà seguenti *(assiomi di numerabilità)*, di cui la seconda evidentemente è molto più particolare della prima:

e). L'insieme dei vari intorni di ciascun punto è numerabile.

f). L'insieme degli intorni di tutti i punti è numerabile.

È chiaro che l'assioma *f* sussiste per l'ordinario spazio geometrico ad un numero qualunque di dimensioni; basta assumere come intorni le sfere di raggio razionale i cui centri hanno tutte le coordinate razionali. L'autore esamina particolarmente le conseguenze dei due assiomi, e si trattiene sul secondo per svolgere in base ad esso una teoria che comprende come caso speciale l'ordinaria teoria degli aggregati di punti e dei numeri ordinali trasfiniti. Introduce poi un'ulteriore limitazione, considerando gli spazi *metrici*, in cui cioè ad ogni coppia di elementi x, y può farsi corrispondere un numero non negativo (*distanza*) xy tale che:

α) $\overline{yx} = \overline{xy}$;

β) $\overline{xy} = 0$ sempre e soltanto quando x ed y coincidono;

γ) $\overline{xy} + \overline{yz} \geq \overline{xz}$.

Un caso speciale degli spazi metrici è lo spazio *euclideo* (ad n dimensioni), in cui l'elemento x è un complesso di n numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e:

$$\overline{xy} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2};$$

l'autore tratta con particolare larghezza il caso di $n = 2$.

Digitized by Google

Il C. 9 è dedicato allo studio delle funzioni. Per *funzione* (uniforme) s'intende una corrispondenza univoca tra i punti x d'uno spazio topologico A ed i punti y di un altro B, che ne costituiscono le *imagini*. Una funzione $f(a)$ si dice *continua* in a, se per ogni intorno V_b di $b = f(a)$ esiste un intorno U_a di a la cui imagine sia contenuta in V_b. Se A, B sono spazi metrici, può anche definirsi la continuità uniforme. Se, più particolarmente, A, B sono spazi euclidei, ed il primo è ad una sola dimensione, può chiamarsi *curva continua* l'imagine continua in B di un intervallo $p \leq x \leq q$ di A; qui si presentano ben note ed importanti questioni sul concetto di *dimensione* e sulle corrispondenze tra spazi di un numero di dimensioni diverso. Tra le funzioni discontinue possono distinguersi le funzioni *punteggiate discontinue;* lo studio di tali funzioni si connette con quello delle successioni di funzioni continue, che comprende le classiche ricerche di ARZELÀ e di BAIRE.

Finalmente l'ultimo capitolo (C. 10) concerne la teoria della grandezza degli aggregati di punti appartenenti ad uno spazio euclideo. L'autore chiama *volume* (*Inhalt*) la grandezza secondo PEANO e JORDAN, *misura* (*Mass*) quella secondo LEBESGUE; alle due definizioni corrispondono i due concetti d'integrale, quello di RIEMANN e quello di LEBESGUE.

Questo rapido riassunto dell'opera di HAUSDORFF, se è insufficiente a dare un'idea completa del contenuto di essa, potrà tuttavia far apprezzare il suo grande valore e le notevoli novità che essa racchiude. Nel cammino ascendente che percorre da alcuni anni, con crescente velocità, la teoria degli aggregati, essa rappresenta, non solo uno sguardo ai sentieri già tracciati, ma anche un importante passo innanzi tanto sulla via della generalità che su quella del rigore.

G. VIVANTI.

Algebra elementare.

SEBASTIANO CATANIA, *Grandezze e Numeri.* — Catania, N. Giannotta, 1915. 8°. p. 59.

EUCLIDE, nei suoi immortali *Elementi*, deduce dal concetto generale di *grandezza*, quello di *rapporto*, e, con l'aiuto del concetto di *numero intero*, sviluppa le proprietà fondamentali dei rapporti,

Digitized by Google

che, a parte il nome e l'algoritmo formale, risultano dei veri e propri *operatori* per le grandezze, e che non sono poi altro che gli attuali *numeri reali assoluti* Q_0. Facendo astrazione dai *molteplici* ed *equimolteplici*, ecc., che rendono pesante l'esposizione euclidea, è indubitato che, almeno nei fondamenti, la concezione tramandataci da EUCLIDE è geniale, concreta, generale e pratica.

A tale concezione, almeno per la sua sostanza e indipendentemente finanche dal concetto di numero intero N_0, ritorna il Prof. S. CATANIA nel suo opuscolo « *Grandezze e Numeri* » nel quale sviluppa, sotto forma didattica semplicissima, un concetto indicato fin dal 1899 e 1904 dal Prof. C. BURALI-FORTI (*), e recentemente (1915)[d] liberato da alcune complicazioni formali, esistenti nei primi lavori.

L'Algebra può sussistere come scienza chiusa in sè, anche fino a degenerare in algebrismo: ma è indubitato che nelle sue feconde applicazioni alla Fisica, alla Meccanica, alla Geometria, i numeri compariscono, non perchè numeri, ma perchè misure di grandezze sulle quali effettivamente si deve operare.[d] Ne segue che, definendo, come di solito, isolatamente, grandezze e numeri e *collegando* poi questi a quelle, si fa cosa contraria alla genesi primitiva e naturale dei numeri, e, anche, cosa contraria alla sostanza delle applicazioni matematiche.

Inoltre, nel campo didattico, l'algoritmo, generale e semplice, comune a grandezze e numeri, viene spezzato in numerose parti; queste si fondono, è vero, in un unico algoritmo, ma questa fusione, questa *sintesi*, non si presenta mai chiara al giovane studente: sia perchè ogni auto-sintesi, o una sintesi che segue una prolissa analisi, richiede una solida e lunga educazione intellettuale, sia perchè la *prolissità* dei metodi ordinari raggiunge sempre

(*) Dovrò citare appresso i seguenti lavori del Prof. C. BURALI-FORTI:

(a) *Les propriétés formales des opérations algébriques* (Revue de Mathématiques par G. PEANO; t. VI, a. 1899. - Estratti: G. B. Petrini, Torino).

(b) *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino: vol. XXXIX, a. 1904).

(c) *Gli enti estratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; vol. XXI, s. 5ª, 2º sem 1912).

(d) *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; vol. XXIV, s. 5ª, 1º sem. 1915).

(e) *Nuove applicazioni degli operatori* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino; vol. L, a. 1915).

Digitized by Google

il non desiderato scopo di fare prendere in uggia la matematica alla maggior parte degli studenti.

Questi ed altri difetti usuali sono evitati dall'A. nell'opuscolo didattico *Grandezze e numeri*, per gli studenti delle scuole medie superiori. Sarebbe troppo lungo esaminare l'opuscolo nelle sue varie parti: mi limiterò a riferire sui punti di fondamentale importanza, sia didattica che scientifica.

*
* *

Anzitutto i Q_0, poi le *grandezze geometriche*, i *vettori* ecc. sono definiti come *operatori*; ed è quindi naturale che l'A. abbia dato sotto forma elementare e pratica un cenno (§ I) dell'algoritmo degli *operatori* e delle *operazioni*, che da essi derivano.

Essendo u una classe e $+$ una operazione per i suoi elementi, l'A. dice (§ II) che « u è una classe di grandezze omogenee rispetto all'operazione $+$ », o, brevemente, che « u è una Grand $+$ », quando per u e $+$ sono verificate certe condizioni I-IX (*), che esprimono proprietà elementari e ben note delle comuni grandezze geometriche e fisiche. Conviene notare che le I-IX *non sono postulati*, perchè l'A. *non domanda* che esse siano ammesse per una *classe fisica nota sperimentalmente*; l'A. stabilisce soltanto il *valore preciso* della frase « u è una Grand $+$ » vale a dire dà una *definizione*, che ha l'unico scopo di abbreviare il linguaggio.

Cadono dunque tutte le obbiezioni mosse da alcuni critici e riguardanti l'*esistenza* delle Grand $+$ (*). In base al significato logico ordinario dell'esistere (**) si prova l'esistenza di Grand $+$, costruendo effettivamente dei suoi elementi, come le classi *lunghezza*, *area* ecc. E qui la questione dell'esistenza si *sposta*: le classi *lunghezza, area*, ecc. esistono o no? (***). Per rispondere alla domanda si ricorra pure alle *relazioni*, rimedio universale! Ma la questione si sposta ancora: occorre dimostrare che *le relazioni esistono*[c], e, poichè sono relazioni tra punti, si dovrà anche provare *l'esistenza dei punti*. Si faccia pure, ma si badi di non cader nel grottesco; ed è facile cadervi, come vi cadrebbe quel docente che trattenesse per un'ora i suoi allievi discutendo questa

(*) Assolutamente indipendenti tra loro. Ciò era noto[b] in parte, ma l'A., completato il sistema di condizioni, ha pure completata la dimostrazione dell'indipendenza; il che pubblicherà a parte.

Digitized by Google

elegante alternativa « sono io che vado verso quel muro, o è quel muro che vien verso di me? » *That is the question!!*

Stabilite alcune importanti e semplici proprietà delle grandezze (§ II), l'A. definisce subito (§ III) la classe generale Q_0 dei numeri come quella classe di operatori per gli u (e gli u formano una Grand +) tale che:

A). Se a e b sono u, a non è nullo, esista un Q_0, α, ed un solo, tale che, qualunque siano a, b, si abbia $\alpha a = b$.

B). Se α è un Q_0, a, b sono u, si abbia, qualunque siano α, a, b,

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$$

C). Se α è un Q_0 ed esiste un u non nullo x, tale che $\alpha x = x$ per qualunque altro u non nullo, a, si abbia, qualunque sia α, $\alpha a = a$.

D). Se α, β, γ sono Q_0, ed esiste un u non nullo x, tale che $\gamma x = \alpha x + \beta x$, per un altro u non nullo a, si abbia, qualunque siano α, β, γ, a, $\gamma a = \alpha a + \beta a$.

Qui è certo necessario dimostrare che le condizioni *A-D* individuano una ed una sola classe di operatori per gli u, cioè che la classe Q_0 *esiste* ed è *unica* (si intende dipendentemente dalla u). Tale dimostrazione (§ VI n. 28) si fa così: « ammesso che le *A-D* individuino una sola classe Q_0, si dimostra che la classe stessa è *effettivamente costruibile*, e in un sol modo, mediante elementi esistenti, e che così costruita soddisfa effettivamente alle *A-D*; ciò prova appunto l'esistenza e l'unicità della classe Q_0 ».

Questa forma di ragionamento, assai semplice, non è stata usata finora nel campo didattico, e può essere ignota a molti; essa è del tutto analoga a quella che si usa assai di frequente nella Fisica-matematica, e che consiste nel presupporre intanto, l'esistenza di una funzione che soddisfa alle condizioni volute, poi nel costruire tale funzione, e infine nel verificare che essa soddisfa effettivamente a tutte le condizioni imposte, e che è l'unica funzione che gode di tale proprietà.

(*) I metafisici si sono sbizzarriti abbastanza con l'esistenza di Dio e dell'anima, senza che ci sia bisogno che i matematici li imitino.

(**) Cfr. G. Peano, *Formulario mathematico* (Ed. I-V), e *Sulle proposizioni esistenziali* (Atti del V Congresso internazionale dei Matematici; Cambridge, anno 1912).

(***) La risposta si può cercare nelle belle ed interessanti Memorie del compianto M. Pieri sui fondamenti della Geometria, largamente citate da autori stranieri, e pressochè ignote fra noi, sovratutto (!) nel campo didattico.

Digitized by Google

Ammesso, dunque, che le condizioni *A-D* individuino la classe Q_0, l'A., dopo aver definito nominalmente le classi N_0 (*), R_0 come classi parziali di Q_0, dimostra in modo semplice e rapido (**) le poche proprietà delle grandezze e dei Q_0, indispensabili, sia per i fondamenti dell'algoritmo, sia per la effettiva costruzione delle classi N_0, R_0, Q_0 (n. 11-27). Dopo ciò l'A. dimostra, nel modo indicato, l'esistenza e l'unicità (n. 28) della classe Q_0 relativa agli u, e infine (n. 29) ottiene i Q_0 *assoluti*, cioè indipendenti dalla generica Grand + indicata con u.

Fin qui compariscono soltanto le operazioni +, ×; vengono poi (§ VII) introdotte le altre operazioni, e poi le *grandezze con segno o relative* (e quindi implicitamente i $\pm Q_0$, perchè i Q_0 formano una Grand +).

*
* *

La sintesi dell'algoritmo delle grandezze e numeri è fatta dall'autore fin dall'inizio; e ciò è importante constatare, sia per il valore scientifico-formale, sia per il grande valore didattico di tale sintesi. Definita, come si è detto, la classe generale Q_0 e definita (n. 12) la somma (+) per i Q_0, l'A. dimostra subito che Q_0 è una Grand +. Da questa proposizione semplice dimostrata pure in modo semplicissimo, deriva la indicata sintesi. Le proposizioni dimostrate (§ II) per le grandezze della classe generica u, valgono senz'altro per la classe Q_0; ogni proposizione che lega Q_0 ed u, si cambia in una proprietà del *prodotto funzionale* (identico al *prodotto aritmetico* ×) dei Q_0, sostituendo Q_0 ad u. Insomma, tutto l'algoritmo delle grandezze Q_0, e che si espone, con i metodi ordinari, prima per gli N_0, si ripete per gli R_0 e si ripete ancora per i Q_0, e poi per le grandezze in sè, o collegate ai Q_0, viene *esposto una volta sola!*

(*) L'A. definisce nominalmente la classe N_0 sotto una forma derivata da quella per postulati del PEANO, che pone in piena evidenza il *principio d'induzione*, e non da quella del PIERI, che sostituisce a tale principio la nozione comune « ogni classe esistente di N_0 ha un minimo ». Sebbene la forma del PIERI sia più semplice di quella del PEANO, la preferenza data a questa è dovuta al fatto che il principio d'induzione dà subito la legge finita di formazione degli N_0, mentre con quella, occorre *dimostrare* il principio di induzione. Se qualcuno ha *opinione* diversa (ed è lecito averla) può facilmente modificare il testo.

Per ciò che riguarda la legge *finita* di induzione cfr.(d), pag. 494, l^a^. nota

(**) Semplicità e rapidità sono elementi didattici della massima importanza.

Digitized by Google

Notevole economia di tempo e di sforzo intellettuale che, oltre al valore scientifico, ha un grande valore didattico.

Giova pure osservare che l'A. ha, molto opportunamente, introdotte nei §§ II-VI soltanto le operazioni $+, \times$, escludendo invece le inverse $-, /$; vale a dire con *minimi mezzi* ha ottenuto il *massimo risultato*, cioè ha seguito la *legge fisica* della *minima azione* che nel campo didattico è quasi sempre del tutto trascurata.

Col metodo seguito dall'A. si raggiunge la completa *fusione*, non solo del calcolo formale degli N_0 ed R_0, ma di tutti i numeri, poichè dalla classe generale Q_0 si ricavano le classi parziali N_0, R_0. È da lungo tempo che si dibatte la questione della fusione del calcolo degli N_0 ed R_0 nelle scuole medie inferiori e credo utile dire qualche parola in proposito. Se la fusione si riferisce alla parte *materiale* delle operazioni (*esecuzione effettiva*), è indubitato che le operazioni sugli N_0 devono *precedere* quelle sugli R_0, perchè ad es. è impossibile trovare la frazione somma di due frazioni, se non si sa trovare prodotto e somma di due N_0 (*); quindi la fusione si riduce a dare per ogni operazione sugli R_0 una sola regola che comprenda anche quella (formale) sugli N_0 come caso particolare.

Sotto tale aspetto la fusione è non solo opportuna, ma necessaria, e i molti trattati di Aritmetica che dànno ancora numerose regolette per gli R_0 dovrebbero sparire dalle scuole (**). Ma se la fusione si deve riferire ad una concezione generica della classe R_0 prima della N_0, allora la questione cambia aspetto; cessa di essere *didattica* e diviene *scientifica*. Che la definizione della classe generale Q_0 possa *precedere* quella delle classi N_0, R_0 è un fatto ormai accertato; ma che dalla classe generale Q_0 si possa dedurre *prima* la classe parziale R_0 poi da questa la classe N_0, non solo non è ancora provato, ma, data la natura della classe R_0, pare

(*) Come pure occorre il calcolo degli R_0, o almeno dei decimali, per il calcolo (necessariamente approssimato) degli irrazionali. Un aritmometro opera soltanto con gli N_0.

(**) L'inizio di tale fusione è più antico di quello che si crede ordinariamente. Rimonta almeno al 1886, e si trova sviluppato nell'opuscolo « Fondamenti per la teoria razionale dei numeri » e in un successivo (1889) libretto semi-didattico « Teoria elementare dei numeri ecc. » (esauriti) del Prof. C. Burali-Forti, che hanno dato origine alle attuali « Lezioni di Aritmetica pratica » dello stesso autore, e delle quali la I^a edizione rimonta al 1897.

Digitized by Google

impossibile ottenerlo. In ogni modo, la questione della fusione (*) ha i due aspetti *didattico* e *scientifico*, che occorre tenere separati.

*
* *

Nei §§ VII, VIII, e nell'*Appendice*, l'A. collega il contenuto dei §§ I-VII ai suoi pregevoli libri didattici. Per i *vettori*, *grandezze geometriche*, si vale della nuova forma di definizione di tali enti come operatori(e), eliminando così del tutto le *definizioni per astrazione* e non accettando le *definizioni per classi* (sebbene queste siano, e a torto, state accolte con favore anche nel campo didattico) perchè difettosissime logicamente e praticamente.

Nelle più recenti edizioni dei suoi libri didattici, l'A. aveva adottata l'ultima forma di definizione per astrazione, indicata dal Prof. Burali-Forti(e), alla quale non sono mancate le critiche consistenti però in semplici *affermazioni dogmatiche*, o esposizione di *opinioni*. Nessuno ha indicato il *vero difetto* logico-pratico di tale definizione per astrazione; ed è strano, perchè lo stesso Burali-Forti lo indica, nè cerca di nasconderlo. Egli, infatti, osserva (cfr.(e) n. 5) che delle funzioni f, e quindi delle $f_{u,\alpha}$, *ne possono esistere infinite*. Tanto vale dire che mentre il discusso *postulato logico* (cfr.(e) [8]), individua una sola classe Abs ($\mathfrak{A}$, u, α), gli elementi di tale classe possono essere dedotti dagli u in infiniti modi. Questo il difetto; comune anche alle precedenti forme, sebbene, in più, da queste non si deduca nemmeno l'univocità della classe.

Con la nuova forma di definizione mediante operatori(e), stando per u, α le note ipotesi(e), ed eliminando del tutto il campo $\mathfrak{A}$ di nozioni, la $f_{u,\alpha}$ *può* essere individuata (cfr.(e) defin. di direzione) così:

$$a \varepsilon u . \supset . f_{u,\alpha}\, a = \iota [(\mathrm{Cls}' u)\, f\, u \frown \lambda \ni \{ b \varepsilon u . \supset_b . \lambda b = u \frown_\alpha a \frown_\alpha b \}],$$

da cui risulta subito:

$$a, b \varepsilon u . \supset : f_{u,\alpha}\, a = f_{u,\alpha}\, b . = . a \varepsilon_\alpha b . = . \alpha a = \alpha b,$$

(*) Simile a quella della fusione della Geometria piana con la solida, intorno alla quale si è discusso lungamente, prima ancora di avere un sistema scientifico esatto di postulati geometrici.

Digitized by Google

e la classe Abs $(\mathfrak{A}, u, \alpha)$ diviene la classe percorsa dà $f_{u,a}\, x$, variando x in tutta la classe u cioè $(f_{u,a}\, x) \mid x' u$ (*).

Giova notare che la forma generale, ora indicata, di definizione mediante operatori, prova chiaramente che il *postulato logico* in questione (°) è una proposizione logica assolutamente vera. Infatti, il campo $\mathfrak{A}$ non contenga gli operatori e sia ristretto in modo che in $\mathfrak{A}$ non esista una $\Phi(u, \alpha)$ *semplice* (il che è sempre possibile); esiste allora un campo $\mathfrak{A}'$ più ampio di $\mathfrak{A}$ (e, ad es. $\mathfrak{A}$ cui si uniscono gli operatori o certi operatori e non *soltanto* $\mathfrak{A}$ cui si unisca la ignota classe cercata!) nel quale esiste una $\Phi(u, \alpha)$ semplice; anzi una sola, quando si limitino convenientemente gli operatori da unire al campo $\mathfrak{A}$ (**).

La definizione mediante operatori, semplicissima e logicamente precisa, oltre eliminare le definizioni per astrazione e per classi, toglie il difetto logico delle necessarie *identificazioni* di enti di *specie diversa*. Ad es., se m è un N_0, il razionale $m/1$ deve essere identificato all'intero m anche quando m ed $m/1$ sono, *per definizione*, enti di specie diversa. Con la definizione per classi, m è una *classe di classi*, $m/1$ è una *classe di coppie* e gli elementi di ciascuna coppia sono *classi di classi*; l'identificazione è, in tal caso, addirittura mostruosa! Eppure si *nega* l'esistenza di difetti logici nelle definizioni per classi, anzi si vorrebbe introdurle nell'insegnamento medio!

Non solo, sebbene lo si neghi dogmaticamente (e forse per questo), esistono enti *semplici*, cioè enti a tali che la frase $u\, x$ è un a è sempre *priva di significato*. Ora, colla definizione per classi, gli enti semplici ordinari divengono classi di classi...; pure si dice che questo non è un difetto, neanche didattico, potendosi dopo la definizione, fare astrazione dalla definizione stessa e tornare a considerare come semplici gli enti definiti come classi di

(*) Occorre notare esplicitamente che questo è *un modo* di definire la $f_{u,a}$ e la classe che ne deriva, ma non è il solo (e). Anzi, mentre il modo ora indicato è opportuno (e) per le *grandezze geometriche* e le *direzioni*, non è più opportuno per le *forme geometriche* e per i *vettori*.

(**) L'opportunità didattica del postulato logico può esser discussa come *opinione*, ciascuno conservando la propria; la sua esattezza scientifica deve esser discussa scientificamente. Si può però ben dire che la nuova definizione mediante operatori *rende del tutto inutili le definizioni per astrazione*, alle quali si è avuto il torto di dedicare troppi sforzi, in luogo di cercare una nuova via, diversa, si intende, dalle definizioni per classi.

Digitized by Google

classi.... Dunque: complicare prima, per semplificare poi; costringere i figli a vergognarsi della loro origine! *De gustibus non est disputandum.*

*
* *

Nelle *Note*, l'A. esamina, sotto l'aspetto scientifico, alcuni concetti fondamentali, che nel § I sono stati esposti sotto forma elementare; ad es. il concetto di operatore è dedotto in modo preciso dalla classe $F(u, v)$ (*), il che dà alla definizione di operatore un assetto scientifico superiore a quello didattico esposto dall'A. nel § I.

Tali note sono dedicate, non agli studenti delle scuole medie superiori, come tutto il resto, ma a quelli delle scuole Superiori di Magistero. L'A. spiega nella Prefazione, e molto opportunamente, quale importanza deve essere data nelle Scuole di Magistero, alle forme *semplici scientifiche*, dalle quali le forme *didattiche devono esser dedotte*. Temo però che dovranno passare degli anni molti, prima che l'opuscolo dell'A. possa essere utilizzato nelle Scuole di Magistero, sia perchè tutte hanno un orario inadeguato allo scopo, sia perchè alcune sono dei *sancta sanctorum* ove tante belle cose si insegnano, tranne quelle richieste dall'A.

Termino congratulandomi col Prof. S. Catania per l'accurato lavoro da lui compiuto, e con l'augurio che i suoi colleghi sapranno degnamente apprezzare l'opera sua. Recentemente sono stati riconosciuti i pregi dei lavori didattici dell'A., che prima erano stati oggetto di ingiustificati attacchi; e se gli attacchi si rinnovassero... *non ti curar di lor, ma guarda e passa.*

Tommaso Boggio.

Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche.

A. Favaro. *Un ingegnere italiano del Secolo decimoquinto.* Discorso inaugurale. Padova, 1914.

(*) S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da esso derivano* (Rendiconti R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, s. 5ª, 2º sem. 1912); cfr. anche [e].

Digitized by Google

Si tratta di Leonbattista Alberti di cui l'oratore descrive tutta la mirabile attività letteraria, scientifica ed artistica.

A. Favaro. *Presentando una traduzione inglese dei " Dialoghi delle Nuove Scienze "*. Atti del R. Ist. Veneto, T. LXXIII, 1913-14.

La traduzione è opera di H. Crew e A. de Salvio e fu pubblicata a New York con prefazione del Favaro; questi, nel presentarla all'Istituto Veneto, fa una rassegna delle altre versioni congeneri anteriori.

A. Favaro. " *Nuove contribuzioni ad una iconografia galileiana.* Ivi T. LXXIV. 1914-15.

Seguito di un precedente lavoro.

A. Favaro. *Serie ventesimaquarta ed ultima di scampoli galileliani.* Atti e Memorie della R. Accademia di Padova, T. XXXI, 1914.

Contiene i seguenti Capitoli: CL. Uno studente giurista inglese scolaro di Galileo in Padova. CLI. Alcune obiezioni del P. Scheiner al sistema copernicano. CLII. Un motto di Galileo intorno al vino. CLIII. Altra narrazione biografica Galileliana contemporanea. CLIV. Aggiunte e correzioni all'indice biografico.

A. Favaro. *Amici e corrispondenti di Galilei.* XXXI: *Bonaventura Cavalieri.* Atti del R. Istituto Veneto, 1914-15 T. LXXIV, Parte II.

Secondo il dotto autore la data di nascita (1598) di B. Cavalieri, indicata dal suo più reputato biografo (G. Piola), non è sicura, anzi fa sorgere alcuni dubbi, che indurrebbero ad anteciparla. Neppure fondate sono le accuse d'un plagio in suo danno che, secondo il Caverni, avrebbe commesso Galileo, onde si ha un nuovo punto in cui le conclusioni esposte nella " Storia del metodo sperimentale in Italia " debbono venire senz'altro respinte. Non basta forse ciò a dimostrare l'interesse che offre questo nuovo numero dell'importante collana biografica dei conoscenti di Galileo? Aggiungiamo che in appendice è dato l'elenco dei temi svolti dal Cavalieri nelle sue lezioni all'Università di Bologna, negli anni 1642-45.

A. Favaro. *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XXXII. *Francesco di Noailles.* Atti e Memorie della R. Accademia di Padova, Vol. XXXI, 1915.

Digitized by Google

Il gentiluomo francese a cui è consacrato il presente scritto da giovane ascoltò a Padova le lezioni di Galileo; del proprio maestro serbò così entusiastico ricordo che, inviato a Roma, in qualità di ambasciatore del re di Francia presso la Santa Sede, dopo la condanna di Galileo si adoperò per ottenere una mitigazione di pena, ma (forse per il mediocre credito di cui godeva come diplomatico) indarno. Durante il suo viaggio di ritorno in patria potè abboccarsi a Poggibonsi col suo antico precettore, che gli consegnò il ms. dei " Dialoghi su due nuove scienze „ i quali in conseguenza poterono venire pubblicatidagli Elzeviri; gli è in memoria di tale prezioso servigio che Galileo dedicò a lui quell'opera immortale.

C. Juel. *Note om Archimedes' tyngdepunktslaere.* Oversigt over det k. Danske Videnskabernes selskabs Forhandl., 1914.

Nuove osservazioni sopra la teoria dei baricentri in Archimede.

Alberto Pascal. *L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva e una lettera inedita di Guido Grandi.* Rend. dell'Istituto Lombardo. II, Febbrajo, 1915.

Albeeto Pascal. *Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXXIV, 1914-15.

Contributi alla storia delle matematiche nel Sec. XVIII; gli originali delle lettere pubblicate si trovano a Milano nella biblioteca di Brera.

G. R. Kaye. *The source of Hindu mathematics.* Journal of the R. Asiatic Society, 1910.

H. G. Zeuthen, *Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles.* Bull. de l'Acad. de Danemark, 1915.

Lavoro, in parte polemico, provocato da recenti lavori di H. Vogt, G. Junge e Eva Sachs, il quale serve di complemento a scritti anteriori dell'autore sopra il tema indicato dal titolo.

F. Amodeo. *Uno sguardo al secolo in cui visse Galileo Galilei.* Atti dell'Accademia Pontaniana, Vol. XLIV, 1914, p. 23.

Y. Mikami. *On the Japanese theory of determinants.* Isis T. II, 1914, p. 9-36.

Digitized by Google

Y. Mikami. *On Shikuzi's translation of Keill's astronomical treatise.* Nieuw Archief voor Wiskunde. II Ser. T. XI, 1914, p. 19.

„ *On Mayenos description of the parallelogram of forces.* Ivi p. 77-76-8.

Nuovi contributi alla conoscenza della matematica giapponese e delle relazioni che questa manifesta con la scienza europea.

P. Van Geer. *Johan de Witt als wiskundige.* Ivi p. 98-126.

Importante studio sull'opera scientifica del noto matematico olandese de Witt.

F. Rudio. *Zur mathematischen Terminologie der Griechen.* Sonder-Abdruck aus der Festgabe für H. Blümner. Zürich 1914.

L'a. conferma l'interpretazione da lui adottata (cfr. *Bollettino* T. XI, 1908-09, p. 101-2) in precedenti lavori per la parola *πμῆμα*, malgrado le contrarie opinioni manifestate dall'Heiberg e dallo Zeuthen.

J. Grabouski. " *Arithmetica linearis* „ *von Benedictus Herbestus* (*Cracoviae 1577*). Bull. de l'acad. des Sciences de Cracovie, Gennaio 1913.

Breve cenno intorno ad una memoria, scritta in polacco, contenente un'analisi completa dell'opera del gesuita Benedictus Herbestus, considerata nelle due edizioni che ebbe (1561-1577), le quali sono fra loro molto differenti. G. L.

Notizie.

Jules Molk appartiene alla brillante schiera di matematici che l'Alsazia ha dati alla Francia. Egli nacque, infatti, a Strasburgo l'8 Dicembre 1857 da una famiglia che, a partire dal sec. XV, ebbe una parte importante in quella città. Dopo aver seguito le lezioni elementari nel ginnasio protestante della sua città natale, passò due anni e mezzo, 1872-74, alla Scuola professionale di Mulhouse e quindi si recò a Zurigo, per seguire le lezioni impartite in quel Politecnico; non volendo prendere la nazionalità tedesca, assunse nel Settembre 1877 la cittadinanza svizzera. Nel 1879, conseguito il diploma di licenza, si trasferì a Parigi, si procurò il diploma di licenza in scienze matematiche e, per prepararsi alla laurea, si recò a Berlino, dove studiò

Digitized by Google

quattro anni sotto la direzione di Weierstrass, Helmholtz, Kirchhoff e specialmente Kronecker; nel frattempo egli era stato reintegrato nella qualità di francese. Il 24 Luglio 1884 ottenne la dignità dottorale col lavoro: « Sur une notion qui comprend celle de divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination », ispirato da idee di Kronecker, che venne pubblicato integralmente nel T. VI degli *Acta mathematica*. Poco dopo (28 Ottobre 1884) fu nominato « maître de conférences » all' Università di Rennes; un anno dopo passò a quella di Besançon col grado d' incaricato ed ivi fu nominato professore il 1° Marzo 1888. Il 18 Dicembre 1890 fu chiamato a Nancy come successore del Mathieu nella cattedra di matematiche applicate; otto anni dopo mutava questa cattedra con quella di meccanica razionale, che conservò sino alla morte, avvenuta per effetto d' un attacco cardiaco, il 5 Maggio 1914. Come matematico il Molk è noto specialmente per l' opera in quattro volumi, da lui pubblicata in collaborazione con Jules Tannery, « Eléments de la théorie des fonctions ellitptiques », che ancor oggi, quattordici anni dopo compiuta, è una delle migliori fra le moltissime che trattano lo stesso argomento. Inoltre egli si è acquistata una grande benemerenza dirigendo, con un tatto ed un' abnegazione esemplari, l' edizione francese della grande " Enciclopedia delle scienze matematiche ". Appunto nell' esercizio di tale funzione egli stabilì amichevoli relazioni con matematici di tutto il mondo, in particolare con matematici italiani; onde generale sarà il cordoglio ed unanime il rimpianto prodotto dalla sua improvvisa scomparsa. Un bel volume (1), ornato dal suo ritratto, venne di recente pubblicato per cura dell' Università a cui alla morte egli apparteneva, come ultimo tributo d' ammirazione e d' affetto da parte di coloro che del Molk furono colleghi e discepoli.

(1) Université de Nancy, Faculté des Sciences. *Jules Molk Professeur*, 1857-1914.

Digitized by Google

Ackermann 110.
dall'Acqua 122.
Agnelli 34.
Aida 2.
Aijma 2.
Alberti 141.
Albrecht 110
Alessandro Magno 45.
Amaldi 28, 99, 105.
Ammonio 93.
Amodeo 143.
Anassagora 44, 127.
Anassimandro 44, 127.
Antemio 93.
Antifonte 44.
Apollonio 41, 45, 90, 91, 127.
Archelao 44.
Archimede 2, 41, 45, 47, 102, 126, 127, 142.
Aristarco 45, 46, 47, 48, 89, 126-28.
Aristotele 46, 127.
Arzelà 132.
Autolico 47, 89.
Ayer 52.

Baire 73, 132.
Ball (Stawell) 20,
Baltzer 96.
Baridon 15.
Battaglini 37.
Becker 81, 82, 83, 85, 86.
Bégré 38.
Beltrami 37, 81, 82, 87, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122.
Benecke 94.
Benedetti 36.
Bernoulli 56, 57, 126.
Bertini 88.
Betti 19, 87.
Bézout 2.
Bigourdan 78.
Blaserna 37.
Blümme 143.
Boggio 19, 140.
du Bois-Reymond 68.
Boltzmann 8, 9, 15.
Bolyai 95, 99.
Bolzano 69.
Bompiani 25.
Boncompagni 96.
Bonnet 26.
Bordoni 122.
Borel 69, 72, 73.
Bossut 55.
Bottasso 20.
Bouret 32.
Boussinesq 19.
Boutroux 55.
Brahe (Tycho) 7.
Brendel 53.
Brianchon 54.
Brioschi 87.
Brunacci 122.
Bruns 119.
Brunschvicg 55.
Burali-Forti 15-20, 133, 138.

Caldarera 28-29, 58-59.
Calippo 46, 127.
Cantor G. 62, 65, 68, 70, 71, 72, 74, 131.
» M. 40, 41.
Carpo 90.
Casali 32.
Casorati 37, 116, 119, 121.
Castelnuovo 55.
Catania 133, 140.
Cauchy 19.
Cavalieri 141, 142.
Caverni 141.
Cayley 36, 126,
Cebycef 57
Censorino 46.
Ceva T. 142.
Chasles 56, 76, 85.
Chelini 37, 38, 39, 40, 117.
Christoffel 23, 24, 26.
Clebsch 18.
Cocles 35.
Codazzi 23.
Collalto 122.
Comte 32.

Digitized by Google

Copernico 127.
Coppedè 109.
Cousin 32.
Cremona 37, 82, 85, 87-88, 115, 116, 117.
Crew 141.

Damiano 51, 91.
Danzer 122.
Democrito 44, 127.
Dewert 33, 34, 36.
Dinostrato 90.
Diocle 90.
Diofanto 42, 91, 92, 93, 127.
Dirichlet (Lejeune-) 37, 38, 39.
Dolbnia 27.
Domnino 92, 93.
Duhem 54.

Ecfanto 45.
Eliodoro 51.
Empedocle 44, 127.
Eneström 41, 125.
Engel 97, 109.
Enriques 99-105.
Eraclide 45, 128.
Eraclito 44. 127.
Eratostene 41.
Erone 41, 49, 50, 51, 52, 90, 93, 94, 95.
Esiodo 127.
Euclide 41, 47, 48, 49, 50, 52, 90, 91, 94, 96, 98, 127, 133.
Eulero 22, 110, 125, 126.
Eutocio 41, 93.

Fabry 76.
Faugère 56.
Favaro 141.
Fermat 56, 107, 108.
Filolao 45.
Forni Gerolamo 122.
» Luigi 122-5.
Forti 96.
Fortia d'Urban 127.
Fréchet 73.
Frenet 21, 22, 24, 25.
Fujita 2.

Galileo 1, 56, 141, 142, 143.
Galletti 122.
Galvani 105.
Gasiorowski 111.
Gauss 18, 23, 26, 32, 53, 80, 82, 96, 97, 114 118.
Gebhard 34.
van Geer 143.
Geiser 36.
Gemino 41, 90, 91.
Genocchi 87.
Germain (Sofia) 32.
Giamblico 92.
Gibson 104.
G. L. vedi Loria.
Godeaux 33.
de la Goupillière 111.
Grabowski 143.
Graesse 34.
Graf 36, 81, 113.
Grandi 143.
Grassmann 17, 20, 32.
Gratognini 122.
Green 18.
Greenhill 112.
Grupelli 123.
Guglielmo II 31, 112.
Guillemin 29.
Guimaraes 7.
Gylden 108.

Hadamard 55.
Hahn 59. 60.
Hamilton 17, 59.
Hatton 76.
Haussdorff 68, 128-132.
Heath 40, 95, 126-128.
Heiberg 40, 88, 143.
Helmholtz 19, 116, 144.
Herbestus 143.
Hermann 110.
Hertz 19.
Hilbert 29.
Hinneberg 4.
Hobson 125-126.
Hogiwara Teisuke 3.
Hooke 8.
Hoüel 30, 96.
Hultsch 94.

Iceta 45.
Ipazia 50, 92.
Ipparco 44, 45, 46, 48, 49.

Digitized by Google

Ippia 90.
Ipsicle 47.
Isidoro 93.

Jacobi 18, 37, 38, 39.
Jentzsch 111.
Jordan 71, 72, 132.
Juel 142.
Junge 142.

Kaiser 109.
Kant 82-83.
Kaye 142.
Keill 143.
Kempe 108.
Kirchhoff 144.
Klein 4. 126.
Knoblauch 20-26.
v. Koch 29.
Koenigs 74.
Kohlrausch 9.
Krause 110, 111.
Kronecker 144.
Kriloff 87.
Kurt 110.

Lagrange 19, 53.
Lahure 55.
Lamé 19, 37, 109.
Lampe 31.
Laplace 11, 18.
Lattès 17.
Lebesgue 72, 73, 132.
Legendre 32.
Leibniz 32, 123, 126.
Leptimio 47.
Letronne 47.
Leucippo 127.
Levi E. E. 15.
Levi-Civita 10. 59.
Lie 109.
Lindemann F. 5, 125.
» L. 5.
Lobatschewsky 96, 98, 114.
Longomontano 7.
Löwenberg 108.
Lorentz 20.
Loria 4, 5, 7, 26-28, 29, 30, 36, 40-52, 59, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 88, 92, 107, 109, 111, 123, 125, 126 128.
Lückhoff 107.

Mainardi 23.
Maire 54-56.
Majcen 79.
Mansion 30.
Marcolongo 15-20.
Markoff 56-58.
Martin 127.
Mathieu 144.
Maxwell 9, 19 120, 121.
Mayeno 143.
Menelao 43, 90
Mercatore 50.
Metone 46.
Meusnier 22.
Michel 32.
Mieli 42.
Miescher 39.
Mikami 3-4, 143.
Minkowski 20.
Molk 143-144.
Monge 27, 78, 79.
Müller E. 77-78.

Napoleone 122.
Nepero 80.
Newton 1, 56
Nicomaco 91, 92.
Nicomede 90.
Nielsen 6, 7.
de Noailles 142.

Oinopide 127.
Omero 127.

Paganini 122.
Palm 111.
Pappo 2, 27, 41, 47, 48, 90.
Parmenide 127.
Pascal A. 56, 142.
» B. 54, 56.
» S. 55, 56.
Peano 20, 71, 72, 132, 133, 135, 136.
Pelérin 36.
Pérès 7.
Perseo 90.
Peters 96.
Peterson 7.
del Pezzo 105-107.
Pfaff 111.
Picard 5.
Pieri 18, 135, 136.

Digitized by Google

Pincherle 103, 105.
Piola 141.
Pitagora 44, 107, 127.
Pizzetti 48.
Platone 41, 45, 46, 90, 92, 94, 127.
Planude 92.
Poggendorff 32, 123.
Poinsot 27.
Poisson 18, 53.
Porter 9.
Posidonio 47, 59, 95.
Proclo 49, 50, 90, 91.

Quetelet 32, 33.

Rabdas 91.
Rauber 110.
Reye 76.
Rhind 52.
Ribaucour 111.
Riccardi 123.
Riccati 30.
Riemann 82, 132.
Römer 7.
Rudio 143.

Saccheri 142.
Sachs 110, 142.
Sainte-Laguë 74-75.
de Salvio 141.
Schiff. 116.
Schilling 111.
Schläfli 36-40, 80-86, 113-122.
Schlesinger 53.
Schmid 78.
Schmidt 96, 97.
Schönflies 59-74.
Schumacher 96.
Schwarz 32.
Seki Kowa 1, 2.
Seleuco 45.
Senofane 44.
Sereno 41.
Sesto Giulio Africano 52.
Severo (Alessandro) 52.
Shikuzi 143.
Simon 32.
Simplicio 90.
Soons 33, 36.
Specht 101.
Spitz 109.
Stäckel 95-99.
Staudt 105, 106.
Steiner 2, 36, 37, 38, 39, 40, 76.
Strabone 49.
Study 109.

Taisnier 33-36.
Talete 44, 127.
Tanner 127.
Tannery J. 104.
Tannery P. 40, 88-95, 127.
Tardy 37, 123, 128.
Taylor 3.
Teeteto 92, 110.
Tenore 112.
Teone Alessandrino 41, 50.
» Smirneo 45, 93.
Timerding 80.
Tognola 122.
Tolomeo (Claudio) 41, 46, 48, 49, 50, 51, 93, 127.
Tomassetti 7.
Torricelli 56.
Tortolini 37.
Traiano 48.
Tresse 110.

Valentin 117, 118, 119.
da Vinci 4.
Vitali 111.
Vivanti 74, 108, 122.
Viviani 48, 56.
Vogt 142.
Volta Alessandro 31.
» Luigi 32,
Volterra 7-15.

von Walterhausen 93.
Webster 9,
Weierstrass 53, 69, 144.
Wessel 7.
Wiesner 59.
Willamowitz-Möllenderff 110.
Winkler 111.
de Witt 143.

Zarlatti 7.
Zanoli 122.
Zenofano 127.
Zermelo 61, 62.
Zeuthon 4-5, 7, 40, 88, 142, 143.
Zona 109.

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 113-122.
Luigi Forni Matematico Pavese (G. Vivanti), pag. 122-125.
Storia (G. L.) pag. 125-128.
Teoria degli insiemi (G. Vivanti), pag. 128-132.
Algebra elementare (T. Boggio), pag. 132-140.
Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche, pag. 140-143.
Notizie (Jules Molk), pag. 143-146.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

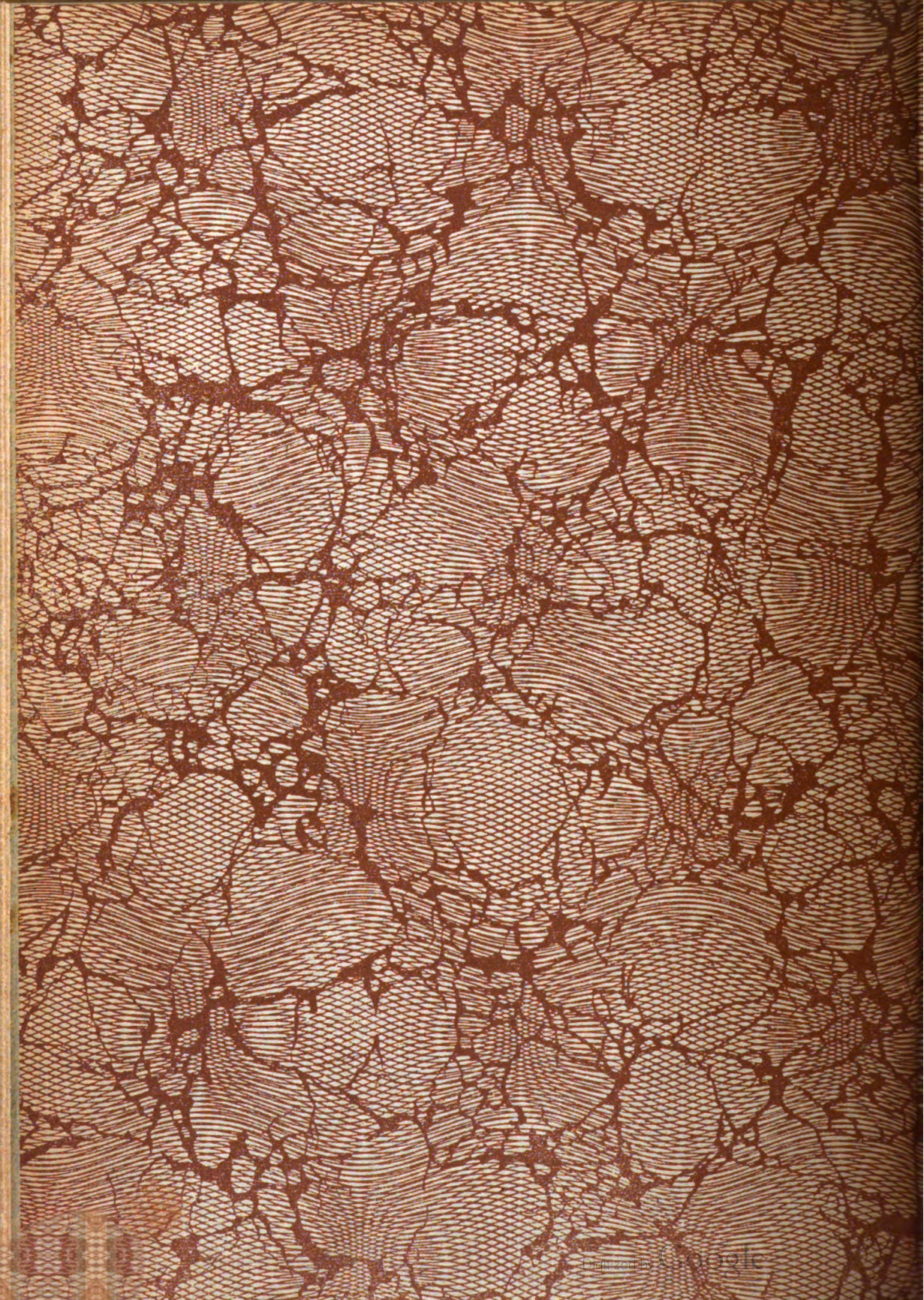
Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

Borel. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
Braude. — Les coordonnées intrinsèques. L. 2,25.
Castelnuovo. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III, L. 15.
Dolbnia J. — Oeuvres mathématiques publiées par Kriloff. L. 12,50.
Enriques. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
Guillaume. — Les récents progrés du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: Sanden. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: Hjelmslev. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
Hausdorff. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
Salpeter. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
Smith e Mikami. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
Zeuthen. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google